

Praktische Ballistik

**Artilleristisches Rechnen, Einführung in die Ballistik
und in die Lehre von der Treffwahrscheinlichkeit**

von

Dipl.-Ing. Robert Schmidt

Oberst a. D.

Vorbemerkungen

Das vorliegende Heft wendet sich nicht nur an den Artilleristen, sondern es behandelt auch Fragen, wie sie bei der Panzerwaffe oder der Panzerabwehr, bei den schweren Waffen der Infanterie -- kurz bei jedem Schießen gegen Erdziele auftreten. Daß ein großer Teil des Inhalts artilleristisches Aufgabengebiet darstellt, liegt in der Natur der Sache.

Das Heft enthält zunächst möglichst einfach gefaßte Erklärungen der wichtigsten ballistischen Vorgänge, es gibt in einem zweiten Teil Anleitungen zu Nahrungs- und Überschlagsrechnungen, wie sie beim Schießen immer wieder gebraucht werden, und bringt schließlich eine Einführung in die Lehre von der Treffwahrscheinlichkeit und somit eine grundsätzliche Erklärung sämtlicher Schießregeln.

Es will folgenden Zwecken dienen:

Erstens soll dem vorwärtsstrebenden Offizier oder Offiziersanwärter die Grundlage für ein wirkliches Verständnis seiner Waffe, seiner Vorschriften usw. gegeben werden.

Zweitens will das Heft dem Soldaten all das an Formeln, Rechenverfahren usw. zur Verfügung stellen, das er braucht, um seine Schießbehelfe vollständig auszuschöpfen, aus ihren Angaben alle möglichen Schlüsse zu ziehen (etwa Flughöhen rasch zu ermitteln usw.) und sich sogar, wenn es nötig ist, unter Umständen ohne Schußtafel noch einigermaßen behelfen zu können. (Beutegeschütze!)

Weiterhin soll für den in der Waffentechnik tätigen Ingenieur die Brücke zum Aufgabengebiet und zur Denkweise des Soldaten, besonders des Artilleristen, geschlagen werden. Gerade der Waffeningenieur wird die angegebenen Näherungsverfahren oft nötiger brauchen als der Offizier, dem meist die fertige Schußtafel zur Verfügung steht.

Alle angeführten Überlegungen, Begründungen, Rechenverfahren usw. sind allgemeingültig, also nicht auf deutsche Verhältnisse (Geschütz- oder Geschosarten, Stoffanordnung in der Schußtafel, Vorschriften für das Schießen usw.) beschränkt.

Es wurde versucht, mit möglichst elementaren mathematischen Mitteln auszukommen. Vorausgesetzt muß an Vorkenntnissen aber werden:

1. Die Grundlage der Mechanik der festen Körper und der Flüssigkeiten (Kenntnis der Begriffe: Kraft, Druck, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Masse, Arbeit, Wucht), wie sie jedes gute Lehrbuch der Physik vermittelt.
2. Einige Kenntnis der allgemeinen Waffenlehre.
3. Die Anfangsgründe der Trigonometrie (Kenntnis der Winkelfunktionen).
4. Die Grundlagen der analytischen Geometrie (einiges Vertrautsein mit dem Wesen von Kurvengleichungen).

An manchen Stellen ließ es sich nicht vermeiden, einfache Differentialrechnung heranzuziehen, diese Abschnitte sind mit * gekennzeichnet, während diejenigen Teile, bei denen einige Grundkenntnisse auf dem Gebiet der Integralrechnung oder der Differentialgleichungen vorausgesetzt wurden, mit ** bezeichnet sind. Diese beiden Arten von Abschnitten, die außerdem durch Kursivdruck vom übrigen Inhalt abgesetzt sind, kommen für denjenigen Leser, dem nur an der Praxis gelegen ist, weniger in Betracht; sie können ohne Schaden für das Gesamtverständnis ausgelassen werden.

Eines der Ziele des vorliegenden Heftes ist es auch, dem Leser den Anschluß an die ballistische Fachliteratur im engeren Sinne zu vermitteln. Die nachstehende Schrifttumsübersicht enthält Bücher, die für eine Weiterarbeit empfohlen werden können.

Für den Praktiker — sei es der Soldat oder der Ingenieur — ist wohl die Zusammenstellung von Näherungsverfahren der wichtigste Teil dieses Heftes; dieser Abschnitt ist deshalb besonders breit und ausführlich gehalten. Der Verfasser hofft, daß neben der großen Zahl durchgerechneter Beispiele besonders die Musterflugbahnen und die damit gegebene Möglichkeit beliebige Beispiele zu bilden, es auch dem mathematisch weniger geschulten Leser ermöglichen, dieses Gebiet meistern zu lernen. (Für die Durchrechnung eines großen Teils der Musterflugbahnen dankt der Verfasser Herrn Dr. habil. Athen, Elmshorn.)

Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß der Leser aus den angegebenen Näherungsverfahren, die für die Praxis besonders wichtig sind, erst dann den vollen Nutzen ziehen kann, wenn er schnell, ohne großes Suchen, das im Augenblick erforderliche Verfahren verfügbar hat. Das wird dadurch erreicht, daß immer wieder Beispiele (zunächst die angegebenen, dann aber selbst gewählte, am besten dem praktischen Schießbetrieb entnommene) tatsächlich mit Bleistift und Rechenstab durchgerechnet werden. Das schnelle Auffinden eines benötigten Verfahrens wird durch die Tafel mit Formelsammlung auf Seite 111 erleichtert.

Es ist zu erwarten, und zu hoffen, daß ein Teil der Leser aus mathematischem Interesse die Frage stellt, wie sich denn nun eine Flugbahn genau berechnen läßt; es wurde deshalb ein Verfahren aufgenommen, das es gestattet, auf nicht allzu schwierige Weise die Flugbahn aus den Anfangselementen und dem Luftwiderstand rechnerisch festzulegen. Ein zweites Verfahren löst dieselbe Aufgabe zeichnerisch.

Dafür sind im vorliegenden Heft die Differentialgleichungen der Außenballistik und ihre Herleitung weggelassen, da man von diesen Gleichungen ausgehend doch nur mit Hilfsmitteln der höheren Mathematik weiter fortschreiten kann.

Der Abschnitt über den Einfluß der Erddrehung auf die Flugbahn wurde — obwohl sein Inhalt für die Mehrzahl der Leser keine praktische Bedeutung hat — aufgenommen, weil gerade auf diesem Gebiet erfahrungsgemäß viele Fragen auftauchen. Die hier gewählte Erklärung geht vom Standpunkt eines Beschauers aus, der außerhalb der sich drehenden Erde ruht. Dadurch kommt man mit Trägheitswirkungen aus und kann auf die Einführung der Corioliskraft verzichten.

Im übrigen ist in einigen Beispielen mit voller Absicht neben der artilleristischen Strichteilung die Alt-Gradteilung beibehalten worden, da ballistische Tabellenwerke noch die Gradteilung, mit Unterteilung in Minuten, führen, und da auch die Skalen für die trigonometrischen Funktionen auf den üblichen Rechenstäben nach Graden geteilt sind. Nötigenfalls können Winkel von einer Einheit in eine andere mittels der Werte der Tabelle auf Seite 112 umgerechnet werden.

Alle Zahlenwerte, die in diesem Buche aufgeführt sind, beziehen sich auf das technische Maßsystem (Meter, Sekunde, Kilogramm als Kraftmaß), lediglich das Geschosßkaliber wird, wie üblich, in cm angegeben, bzw. verrechnet.

Schrifttumsübersicht

Zur Weiterarbeit auf ballistischem Gebiet werden empfohlen (die Bücher sind z. T. noch nicht wieder neu aufgelegt):

1. Kutterer, Ballistik, Verlag Vieweg (erscheint neu 1957). Dieses verhältnismäßig leicht-verständliche Buch schließt praktisch an das hier vorliegende Heft an, es enthält jedoch auch das hier nicht besprochene Gebiet der ballistischen Meßtechnik.

2. Athen, Ballistik, Verlag Quelle u. Meyer (erscheint neu 1957). Behandelt vor allem die Außenballistik vom Standpunkt des Mathematikers aus.

3. Hänert, Geschütz und Schuß, Verlag Springer (1935). Enthält neben der Innen- und Außenballistik auch das Gebiet der Geschützmechanik.

4. Cranz, Lehrbuch der Ballistik (4 Bände), Verlag Springer (1925). Das grundlegende Werk über die gesamte Ballistik.

5. Für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Schießen ist noch immer das führende Werk:

Sabudski, v. Eberhard, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Stuttgart, 1906.

Inhalt:

	Seite
Allgemeines, Stoffgliederung	9
1. Innenballistik normaler Schußwaffen	
I. Der Vorgang im Rohr, Druckverlauf	9—11
II. Die Ausnutzung der Ladungsenergie	11
2. Außenballistik	
A) Die Flugbahn im luftleeren Raum	
I. Die Gleichung der Flugbahn im luftleeren Raum, Folgerungen	12—15
II. Schießen gegen Ziele außerhalb der Abgangsebene	16—18
III. Zusammenstellung der Formeln für den Wurf im luftleeren Raum	18—20
IV. Rechenbeispiele für den luftleeren Raum	20—22
V. Die Erhöhung beim direkten Richten. Das Schwenken der Flugbahn. Geländewinkel und Libelleneinstellung	22—25
B) Der Schuß im luftgefüllten Raum	
I. Der Luftwiderstand:	
a) Die Größen, von denen der Luftwiderstand in erster Linie abhängt. Die Verzögerung des Geschosses durch den Luftwiderstand	25—27
b) Das Zustandekommen des Luftwiderstandes und seine Abhängigkeit von der Geschosßgeschwindigkeit	27—29
c) Ein vom Luftgewicht unabhängiger Einfluß der Lufttemperatur auf die Größe des Luftwiderstandes	29—31
d) Über den Formfaktor i	31

e) Ermittlung des Zahlenwertes für den Luftwiderstand aus Schußtafelwerten	31--32
II. Geschößflug und Stabilisierung:	
a) Allgemeines	32
b) Die Pfeilstabilisierung	33
c) Die Drallstabilisierung	33--36
d) Rechtsabweichung. Grenze der Folgsamkeit des drallstabilisierten Geschosses. Der Magnuseffekt	36--37
III. Der Geschößknall	37--39
IV. Geschößform	39--40
V. Eigenschaften der Flugbahn im luftgefüllten Raum	40--41
VI. Die Rakete:	
a) Der Raketenantrieb	41--42
b) Arten der Rakete. Unterteilung nach verschiedenen Gesichtspunkten	42--43
c) Besonderheiten der Flugbahn der Rakete	43--44
d) Die Gleichungen für die Antriebsflugbahn der Rakete ohne Berücksichtigung von Erdanziehung und Luftwiderstand	44--46
C) Abschätzungs- und Näherungsverfahren	
I. Musterflugbahnen	48--51
II. Näherungen für den ersten mündungsnahen Teil der Flugbahn (nicht für Raketenflugbahnen!)	51--54
a) Ermittlung von Flughöhen im ersten Teil des aufsteigenden Astes	51--52
b) Faustformel für den Geschwindigkeitsabfall im mündungsnahen Teil der Flugbahn	52--54
III. Näherungen für die Werte des Gipfelpunktes:	
a) Gipfelhöhe aus der Endflugzeit	54--55
b) Abschätzung der Gipfelhöhe aus Schußweite und Abgangswinkel	55
c) Gipfelhöhe derjenigen Schußbahn, die die höchste Schußweite ergibt	55--56
d) Abschätzung der Gipfelentfernung	56
e) Gipfelentfernung aus Gipfelhöhe und Erhöhung	56--57
f) Geschößgeschwindigkeit im Gipfelpunkt	57
g) Ersatz der Flugbahn durch eine Parabel in der Nähe des Gipfelpunktes	57--58
IV. Näherungen für den absteigenden Ast und für die Werte des Fallpunktes (auch für Raketenbahnen):	
a) Ermittlung von Flughöhen im absteigenden Ast:	
1. Mit der Libellentafel	58--59
2. Ohne Libellentafel durch Schwenken der Flugbahn (nur bei flachen Flugbahnen)	59--60
3. Durch Rechnung mittels einer angenäherten Flugbahngleichung	60--61
4. Zeichnerisch	61
b) Bestimmung von x bei gegebenem X und y	61--63
c) Bestimmung von X bei gegebenem x und y	63--65

1. Mit der Libellentafel	63
2. Ohne Libellentafel durch Schwenken der Flugbahn (nur bei flachen Flugbahnen)	63—64
3. Ohne Libellentafel durch Rechnung mittels einer angenäherten Flugbahngleichung (Ermittlung der Gesamterhöhung für ein Ziel außerhalb der Abgangsebene.)	64—65
d) Zeichnerische Darstellung des letzten Teils der Flugbahn	65
e) Flugzeit bis zu einem Punkt des absteigenden Astes	65—66
f) Angenäherte Ermittlung des Fallwinkels:	
1. Faustformel zur rohen Abschätzung	66
2. Genauere Formel für ω	66—67
g) Abschätzung der Endgeschwindigkeit	67
V. Verfahren, die die ganze Flugbahn betreffen, oder sich auf beliebige Flugbahnpunkte beziehen:	
a) Ermittlung der Erhöhung für eine gegebene Schußweite (Aufstellung einer behelfsmäßigen Erhöhungstafel)	67—69
b) Ermittlung der Flughöhe eines beliebigen Flugbahnpunktes	69—70
c) Angenäherte zeichnerische Darstellung der Flugbahn	70—72
d) Folgerungen aus der Darstellung der Flugbahn als schräge Parabel nach c	72—73
e) Zusammenhang zwischen Endflugzeit, Schußweite und Abgangswinkel. Endflugzeit einer nicht schußtafelmäßigen Flugbahn	73—75
f) Rechtsabweichung	76
g) Abschätzung der B. W. E.:	
aa) v_0 -Änderung durch Änderung des Geschößgewichts bei gleichbleibender Ladung	76
bb) v_0 -Änderung durch Änderung der Pulvertemperatur	76—77
cc) Schußweitenänderung durch v_0 -Änderung	77
dd) Einfluß des Luftgewichts auf die Schußweite	77—78
ee) Längswindeinfluß	78
ff) Querwindeinfluß	78
VI. Einige Faustregeln über Geschütze, Geschosse und über die mit ihnen erreichbaren Leistungen:	
a) Schußweitenfaktor	78—79
b) Ungefähre Werte der Längen- und Breitenstreuung	79
c) Anhaltswerte für Panzerdurchschlag	79
D) Zwei Verfahren zur Festlegung des Flugbahnverlaufs aus den Anfangselementen bei bekanntem Luftwiderstand:	
I. Ein zeichnerisches Verfahren	80
II. Ein Verfahren zur genauen Berechnung der Flugbahn aus den Anfangselementen und dem Luftwiderstand	80—86
E) Streuung und Treffwahrscheinlichkeit	
1. Allgemeines. Die Fehlerkurve	86—88

II. Streuungsmaße	88—91
III. Die Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren	92—94
IV. Der Fehler des mittleren Treffpunkts	94—95
V. Schüsse mit ungewöhnlich großen Abweichungen, Gesamtausdehnung des Treffbildes	95—96
VI. Zusammensetzung von Streuungen	96—97
F) Einiges über Einschießregeln:	
I. Allgemeines	97—98
II. Einschießen nach der Länge:	
a) Einschießen auf Grund gemessener Abstände der Schüsse vom Ziel:	
α) Ein Verfahren für den ersten Teil des genauen Einschießens	99—100
β) Der zweite Teil des genauen Einschießens, gleichzeitig der Beginn des Wirkungsschießens	100
γ) Die kleinste noch sinnvolle Aufsatzänderung	100—101
b) Genaues Einschießen, wenn die Lage der Schüsse nur dem Vorzeichen nach anzusprechen ist:	
α) Das Gabelschießen:	
1. Einleitendes	101—102
2. Die Frage des Gabelmaßes. Das Auftreten falscher Gabeln	102—104
3. Zum Nachprüfen der Gabel	104
β) Das Reiheschießen:	
1. Ermittlung der theoretisch richtigen Aufsatzänderung aus dem Vor- zeichenverhältnis einer Reihe	104—106
2. Die praktisch auf Grund des Vorzeichenverhältnisses einer Reihe durchzuführende Aufsatzänderung	106—107
III. Einschießen nach der Seite	107—108
G) Der Einfluß der Erddrehung auf die Flugbahn	108—110
Flugbahnbild mit Formelsammlung	111
Natürliche Werte der trigonometrischen Funktionen	112
Umrechnungstafel für die wichtigsten in- und ausländischen Winkelmaße	113

Allgemeines, Stoffgliederung

Unter den waffentechnischen Wissenszweigen steht die Ballistik (von griech. *ballain* = werfen, die Lehre vom Schuß und von allem, was zum Schießen gehört) ihrer Bedeutung nach an erster Stelle. Sie ist die grundlegende Wissenschaft nicht nur der Artillerie (und zwar der Erdartillerie, der Flak, der Marineartillerie), sondern auch der Infanterie, der Luft- und der Panzerwaffe — kurz, es gibt keinen Teil irgendwelcher Streitkräfte und keine Waffengattung, die sich nicht auf die Ballistik stützte. Waffenwirkung bedeutet ja seit der Erfindung des Schießpulvers nichts anderes als Schußwaffen- oder doch wenigstens Bombenwirkung.

Man unterscheidet:

Die innere Ballistik, die die Vorgänge von der Entzündung der Treibladung bis zu dem Augenblick untersucht, da die Einwirkung der Pulvergase auf das Geschöß aufhört, und

die äußere Ballistik, die sich mit der Flugbahn des Geschosses befaßt; sie schließt außerdem die Geschößwirkung im Ziel und die Lehre von der Treffwahrscheinlichkeit ein.

Bei rückstoßfrei verfeuerten Geschossen und ganz besonders bei Raketen läßt sich keine scharfe Grenze zwischen Außen- und Innenballistik ziehen.

1. Innenballistik normaler Schußwaffen

I. Der Vorgang im Rohr, Druckverlauf.

Die Pulverladung erfährt, infolge eines einleitenden Zündvorgangs, eine chemische Umänderung, bei der große Mengen gasförmiger Stoffe entstehen. Diese Gasmenge sind zunächst in einem kleinen Raume eingeschlossen, sie haben außerdem eine hohe Temperatur, daher wirken sie mit starkem Druck auf ihre Umfassungswände, d. h. auf die Rohrwandungen, Teile des Verschlusses und, was am wichtigsten ist, auf den Boden des Geschosses. Dieser Druck kann Arbeit leisten. In der Sprengtechnik besteht die von einem Explosivstoff geleistete Arbeit in der augenblicklichen Überwindung von Kohäsionskräften; daher ist es hier wichtig, hohe Maximalgasdrucke, die nur kurze Zeit zu wirken brauchen, zu erzeugen — ein Zweck, der durch sogenannte brisante Sprengstoffe (v. franz. *briser* = zerbrechen), wie sie z. B. die Füllung von Granaten bilden, erreicht wird. Den außerordentlich schnell verlaufenden chemischen Umsetzungsvorgang solcher Stoffe nennt man Detonation.

Im Gegensatz hierzu soll bei dem — hier zu besprechenden — Abschußvorgang normaler Schußwaffen der Gasdruck dazu dienen, dem Geschöß auf seinem Wege bis zur Mündung eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen, ohne daß dabei die Festigkeit des Rohres oder des Geschosses durch einen unzulässig hohen augenblicklichen Wert des Druckes gefährdet wird. Die Gase sollen schieben, nicht zerstören; mit anderen Worten: die Pulverladung darf nicht brisant wirken, nicht detonieren.

Im allgemeinen kommt es darauf an, eine große Mündungsgeschwindigkeit zu erhalten, das würde am schonendsten für Rohr und Geschöß dann erreicht, wenn man den Gasdruck, der das Geschöß beschleunigt, während des ganzen Geschößweges im Rohr auf möglichst gleichmäßiger Höhe halten könnte, wobei besonders ein extremer, augenblicklicher Spitzenwert zu vermeiden wäre. Andererseits muß im Augenblick des Geschößaustritts aus der Mündung der Gasdruck verhältnismäßig niedrig sein, denn Pulvergase, die unter hohem Mündungsgasdruck aus- und am

Geschoßende vorbeiströmen, würden den Beginn des Geschoßfluges durch seitliche Stöße in unberechenbarer Weise beeinflussen und außerdem ein starkes Mündungsfeuer entstehen lassen.

Diese beiden Forderungen — gleichmäßig hoher Gasdruck, bis der Geschoßboden in Mündungsnähe ist, aber niedriger Mündungsgasdruck — widersprechen einander und sind praktisch unvereinbar; ja, es läßt sich nicht einmal die erste Forderung allein erfüllen. Einen wenigstens grob angenähert gleichbleibenden Gasdruck sucht man auf folgendem Wege zu erhalten: Man sorgt dafür, daß die fortwährende Verminderung des Gasdrucks, die sich durch die Raumvergrößerung (Fortbewegung des Geschosses im Rohr) ergibt, so gut es geht, durch Nachschub immer neuer Treibgase ausgeglichen wird. Das Pulver muß also langsam verbrennen, es muß aber, bevor das Geschoß die Mündung erreicht hat, vollständig verbrannt sein. Daher bestehen ganz bestimmte Beziehungen zwischen den Eigenschaften („Schärfe“, Masse usw.) des Pulvers und dem Geschoß, dem Kaliber, der Rohrlänge, der geforderten Mündungsgeschwindigkeit und dem Verbrennungsraum, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Für das praktische, vor allem das kriegsmäßige Schießen, ist noch folgendes wichtig: Die chemische Natur der Pulver (Schießstoffe) ist von der der brisanten Sprengstoffe nicht verschieden. Es läßt sich also grundsätzlich die Möglichkeit nicht völlig ausschließen, daß unter extrem ungünstigen Verhältnissen der Verbrennungsvorgang des Pulvers in einen detonationsartig verlaufenden Vorgang übergeht. Solche Verhältnisse könnten z. B. eintreten, wenn durch zu hohen Gasdruck bzw. zu kleinen zur Verfügung stehenden Raum, die Teilchen des Pulvers zu sehr aneinandergedreht werden, wobei dann die anfängliche normale, schnelle Verbrennung zu einem weiteren ungewöhnlichen Druckanstieg führt. Ein solcher ungünstiger Fall kann z. B. gegeben sein, wenn ein schlecht angesetztes Geschoß (bei getrennter Munition) dann, wenn dem Rohr die Erhöhung gegeben wird, sich löst, zurückfällt und die Ladung zusammendrückt. Ein einmal eingeleiteter Detonationsvorgang der Treibladung kann dann u. U. durch den Geschoßboden hindurch auf die Sprengladung des Geschosses übergreifen. Fälle dieser Art sind zwar bei den eingeführten Pulvern sehr unwahrscheinlich, sie können jedoch nicht mit völliger Sicherheit ausgeschlossen werden. Gutes Ansetzen des Geschosses ist also nicht nur wichtig, um eine von Schuß zu Schuß gleichmäßige Anfangsgeschwindigkeit zu sichern, sondern auch, damit Rohr-detonieren vermieden werden.

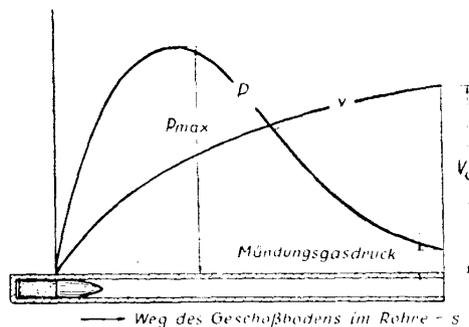


Bild 1: Gasdruck (p) und Geschoßgeschwindigkeit (v) in Abhängigkeit vom Weg des Geschoßbodens (s).

Bild 1 gibt eine Darstellung eines kennzeichnenden Verlaufs von Gasdruck und Geschoßgeschwindigkeit im Rohr, beides angetragen über dem Geschoßweg im Rohr. Man sieht, daß der Gasdruck beim Vorrücken des Geschosses rasch bis zu seinem Höchstwert ansteigt und dann langsam bis auf den Mündungsdruck abfällt. Die Höchstgasdrucke normaler Geschütze liegen im allgemeinen in der Größenordnung von 2000 - 2500 kg/cm², bei Gewehren und ausgesprochenen Höchstleistungsgeschützen können Werte von etwa 4000 kg/cm² erreicht werden.

II. Die Ausnutzung der Ladungsenergie.

Die Treibladung einer Schußwaffe hat, in chemischer Form gebunden, einen gewissen Energieinhalt, d. h. ein Vermögen, Arbeit zu leisten. In dem Augenblick, in dem das Geschöß soeben das Rohr verlassen hat, liegt diese Energie aufgespalten in die folgenden Teilbeträge vor:

1. Energie (Wucht) der Vorwärtsbewegung des Geschosses; sie hat den Wert: $E = \frac{m}{2} \cdot v_0^2$.

Beispiel: Die „Mündungswucht“ eines Geschosses mit dem Gewicht 43 kg und einer v_0 von 600 m/s ist: $E = \frac{43}{9,81 \cdot 2} \cdot 600^2 = 788\,000$ kg m, d. h. sie ist gleich der Arbeit (die Wucht hat die Dimension einer Arbeit), die geleistet werden muß, um eine Tonne 788 m hoch zu heben. Die Leistung, die beim Beschleunigen des Geschosses vollbracht wird, ist gleich der Mündungswucht, geteilt durch die Zeit, die gebraucht wird, um dem Geschöß diese Wucht zu erteilen, also durch die Zeit, die das Geschöß zum Durchlaufen des Rohres braucht. Diese Zeit ist im vorliegenden Falle (der einer schweren Feldhaubitze entspricht) etwa 0,012 s; man erhält also für die Leistung:

$$L = \frac{788\,000}{0,012} = 6,57 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 876\,000 \text{ PS.}$$

Geschütze sind also „Maschinen“ mit ungeheuer großen Leistungen!

2. Bei Drallgeschossen: Energie der Drehbewegung des Geschosses um seine Längsachse.
3. Bewegungsenergie der verbrannten Pulverladung.
4. Bewegungsenergie, die durch den Rückstoß dem Rohr erteilt worden ist, samt Erschütterungs- und Vibrationsarbeit an der Waffe.
5. Arbeitsvermögen und Wärmeenergie der Pulvergase, die soeben beginnen, sich vom Mündungsgasdruck zu entspannen.
6. Arbeit, die bis dahin auf die vor dem Geschöß befindliche Luft übertragen wurde.
7. Arbeit, die zur Überwindung mechanischer Widerstände (Reibung, Einpreßarbeit) im Rohr aufzuwenden war.
8. Wärme, die die Pulvergase an das Rohr abgegeben haben.

Nutzbar ist davon lediglich der erste und, in gewissem Sinne, der kleine, zweite Anteil; die anderen Energieanteile sind im allgemeinen mehr oder weniger unerwünscht. So muß z. B. die Rücklaufenergie des Rohres eigens durch Bremsvorrichtung aufgenommen werden; die Erwärmung des Rohres (auf sie entfallen über 20% der Gesamtenergie!) begrenzt — neben der hohen mechanischen Beanspruchung — dessen Lebensdauer usw. Selbst derjenige Teil des Arbeitsvermögens der Pulvergase (Anteil Nr. 5), der etwa durch eine Mündungsbremse zur Entlastung der Rücklaufbremse herangezogen wird, oder (Gasdrucklader) zur Vorbereitung des nächsten Schusses dient, trägt nicht unmittelbar zur Erhöhung der Geschößgeschwindigkeit bei. Im übrigen steckt in den heißen und noch verhältnismäßig hochgespannten Pulvergasen (bei Nitrocellulosepulvern ist die Temperatur der ausströmenden Gase immer noch 1400° C, der Mündungsgasdruck etwa 300–400 kg/cm², die anfängliche Geschwindigkeit, mit der die Gase ausströmen, weit über 1000 m/s) über 40% der Gesamtenergie.

Bei Gewehren und Geschützen liegt der Nutzeffekt, d. h. die Zahl, die angibt, welcher Bruchteil der Gesamtenergie sich in Bewegungsenergie des Geschosses verwandelt hat, nur wenig über 30%. Bei Raketen (s. S. 46) und rückstoßarmen oder -freien Schußwaffen ist der Nutzeffekt noch ganz wesentlich kleiner. Die nach rückwärts ausgestoßenen Gase sind ja — einem rücklaufenden Rohr gegenüber — verhältnismäßig leicht und erhalten deshalb eine viel größere, nach rück-

wärts gerichtete Geschwindigkeit als ein Rohr. Die Energie steigt aber mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, so daß bei Raketen u. ä. besonders große Energiebeträge für Massen, die nach rückwärts beschleunigt werden, verloren gehen.

2. Die Außenballistik

A. Die Flugbahn im luftleeren Raum.

I. Die Gleichung der Flugbahn, Folgerungen.

Bei der Betrachtung des Schusses im luftleeren Raum wird ganz erheblich von den wirklich herrschenden Verhältnissen abgewichen. Es wird nämlich der Widerstand, den die Luft dem fliegenden Geschosse bietet, weggelassen. Doch gibt diese Idealisierung sehr wertvolle Anhaltspunkte für den wahren Geschosflug und ist unentbehrlich für ein weiteres Verständnis.

Es werde zunächst die Gleichung dieser Flugbahn aufgestellt, aus ihr ergibt sich eine Reihe von Folgerungen, die für die Betrachtung des Schusses im luftgefüllten Raum wichtig sind.

[Die Gleichung einer Kurve ist der Ausdruck für den Zusammenhang zwischen den Koordinaten jedes Kurvenpunktes und denjenigen festen Größen, die für die betreffende Kurve bestimmend sind (z. B. große und kleine Achse bei der Ellipse). Sie gestattet es, für jeden gegebenen Wert einer Koordinate den zugehörigen Wert (es können auch mehrere sein) der anderen Koordinate zu errechnen.]

Die Flugbahn kommt dadurch zustande, daß sich die Wirkung der Erdanziehung auf das Geschöß (d. h. der Fall nach unten) der Trägheitsbewegung (d. h. dem Weiterfliegen auf gerader Bahn mit unveränderter Geschwindigkeit) überlagert, wobei sich die beiden Bewegungen gegenseitig nicht beeinflussen. Eine Kraft — in unserem Falle die Erdanziehung — wirkt nämlich auf einen bewegten Körper genau in derselben Weise ein wie auf einen ruhenden (Unabhängigkeitsprinzip von Newton). Führt also das Geschöß eine Trägheits- und eine Fallbewegung gleichzeitig aus, so gelangt es an dieselbe Stelle, die es erreichen würde, wenn es die beiden Bewegungen einzeln nacheinander ausführen würde.

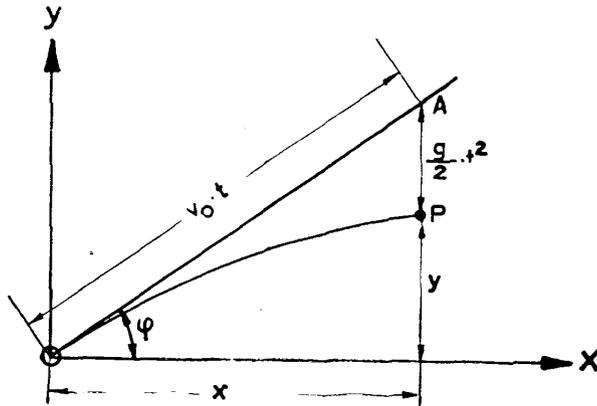


Bild 2: Zur Herleitung der Gleichung der Wurfparabel.

Wir finden danach den Punkt P, an dem sich der Schwerpunkt des Geschosses nach Ablauf von t Sekunden befindet, folgendermaßen: Die Trägheit allein hätte das Geschöß, das sich unter ihrem Einfluß mit gleicher Geschwindigkeit (v_0) unter dem Abgangswinkel φ gegen die Abgangsebene (hier die x -Achse) bewegt, nach A befördert. Es hätte in t Sekunden $v_0 \cdot t$ Meter zurück-

gelegt. Gleichzeitig ist das Geschöß aber gefallen, und zwar nach dem Fallgesetz um $g/2 \cdot t^2$ Meter (g ist die Beschleunigung, die die Schwerkraft jedem freifallenden Körper im luftleeren Raum erteilt, sie beträgt $9,81 \text{ m/s}^2$). Die Lage von P ergibt sich durch Zusammensetzen beider Wege; sie ist (siehe Bild 2) durch folgende Koordinaten bestimmt:

(1)

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \varphi$$

(2)

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Hier haben wir x und y jeweils durch eine dritte Größe (t) ausgedrückt. Schon diese „Parameterdarstellung“ erlaubt es, zu jedem gegebenen x das zugehörige y zu finden, und zwar auf dem Umweg über die zugehörige Flugzeit. y unmittelbar in Abhängigkeit von x erhält man dadurch, daß man t aus Gl. 1 ausdrückt und in Gl. 2 einsetzt. Es ergibt sich:

(3)

$$y = x \cdot \tan \varphi - \frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

In dieser „Gleichung des schiefen Wurfs im luftleeren Raum“ kommt x in der ersten und zweiten, y aber nur in der ersten Potenz vor. Die durch sie dargestellte Kurve ist, wie sich leicht zeigen läßt, eine Parabel (Bild 18 auf S. 40) mit senkrechter Achse.

Diese senkrechte Achse, die durch den Gipfel G geht, teilt die Kurve in zwei spiegelbildlich gleiche Teile, den aufsteigenden und den absteigenden Ast.

[Der höchste Punkt der Flugbahn heißt Gipfel und nicht Scheitel, da man unter Scheitel denjenigen Punkt versteht, an dem die Kurve am stärksten gekrümmt ist. Im luftleeren Raum fallen zwar Gipfel und Scheitel zusammen, im luftgefüllten Raum aber liegt der Scheitel stets auf dem absteigenden Ast, also hinter dem Gipfel. (s. S. 40)]

Jede Waagerechte schneidet die Wurfkurve unter zwei gleichgroßen, nur entgegengesetzt gerichteten, Winkeln. Insbesondere ist der Fallwinkel ω gleich dem Abgangswinkel φ . Das oben erwähnte Unabhängigkeitsgesetz läßt sich auch so aussprechen, daß eine Kraft, die in einer Richtung wirksam ist, in der dazu senkrechten Richtung keinerlei Wirkung (Beschleunigung, also Geschwindigkeitsänderung) ausübt. Der waagerechte Anteil der Geschwindigkeit (v_x) oder die Geschwindigkeit, mit der sich der Lotpunkt des Geschosses bewegt, wird also durch die einzig wirkende Kraft, die Erdanziehung, nicht beeinflusst. Sie bleibt während der ganzen Flugbahn so groß wie zu Anfang, und da das Geschöß ohne Wirkung der Erdschwere in der Sekunde v_0 Meter in der Abgangsrichtung zurücklegen würde, bewegt sich sein Lotpunkt in der Sekunde um $v_0 \cdot \cos \varphi$ Meter. Es gilt also:

(4)

$$v_x = v_0 \cdot \cos \varphi$$

Die Gesamtflugzeit des Geschosses T ergibt sich aus der Gleichung 2); da y im Fallpunkt gleich 0 geworden ist, gilt:

$$0 = v_0 \cdot T \cdot \sin \varphi - \frac{g}{2} T^2.$$

Das gibt für T , neben $T = 0$, der selbstverständlichen Lösung, die dem Beginn der Flugbahn entspricht,

(5)

$$T = \frac{2 v_0 \cdot \sin \varphi}{g}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes von T in Gl. 1 erhält man die Schußweite X

$$(6) \quad X = \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{g}$$

oder, da $2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2 \varphi$,

$$(6a) \quad \boxed{X = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \varphi}{g}}$$

Aus diesem Ausdruck ergeben sich zwei wichtige Folgerungen:

1. Von allen Schüssen, die mit gleicher v_0 , aber verschiedenen Abgangswinkeln abgegeben werden, erreicht derjenige die größte Schußweite, bei dem $\sin 2 \varphi$ am größten ist. Der Sinus eines Winkels hat den Größtwert 1, der zugehörige Winkel, 2φ , ist ein Rechter (1600°).

φ selbst, der Abgangswinkel, der die größte Schußweite ergibt, ist also ein halber Rechter (800°), und für die Höchstschußweite ergibt sich:

$$(7) \quad \boxed{X_{\max} = \frac{v_0^2}{g}}$$

2. Von zwei Abgangswinkeln φ_1 und φ_2 sei φ_1 kleiner als 800° ($\varphi_1 = 800^\circ - \delta$), φ_2 um denselben Betrag größer als 800° ($\varphi_2 = 800^\circ + \delta$). Die dazugehörigen Schußweiten X_1 und X_2 sind

$$X_1 = \frac{v_0^2 \cdot \sin (1600^\circ - 2 \delta)}{g}$$

$$X_2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin (1600^\circ + 2 \delta)}{g}$$

Diese beiden Werte sind gleich, denn es ist:

$$\sin (1600^\circ + \alpha) = \sin (1600^\circ - \alpha)$$

Jede Schußweite läßt sich also mit zwei Abgangswinkeln, einem aus der unteren und einem aus der oberen Winkelgruppe, erreichen. Die beiden Abgangsrichtungen liegen spiegelbildlich zu 800° . Auch die Endgeschwindigkeiten der beiden Flugbahnen sind gleich (nämlich gleich der Anfangsgeschwindigkeit); jedoch ist bei der oberen Winkelgruppe der senkrechte Anteil der Endgeschwindigkeit größer, bei der unteren Winkelgruppe der waagerechte Anteil.

Der Lotpunkt des Gipfels der Flugbahn halbiert (wegen der Hälftengleichheit der Parabel) die Schußweite. Da der waagerechte Anteil der Geschwindigkeit während der ganzen Flugbahn gleich bleibt (Gl. 4), hat das Geschöß den Gipfel nach der Hälfte der Gesamtflugzeit erreicht. Durch Einsetzen des Wertes der halben Flugzeit aus Gl. 5) in Gl. 2) erhält man die Gipfelhöhe y_g :

$$(8) \quad \boxed{y_g = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}}$$

Die größte Gipfelhöhe, die ein Geschöß bei gegebener v_0 erreichen kann, wird beim Schuß senkrecht nach oben erreicht. Sie ist, wie sich durch Einsetzen von $\varphi = 1600^\circ$ ergibt, halb so groß wie die größte Schußweite, die mit derselben v_0 möglich ist.

Aus Gl. 6) und Gl. 8) ergibt sich die Gipfelhöhe, ausgedrückt durch die Schußweite, zu:

$$(9) \quad \boxed{y_g = \frac{1}{4} \cdot X \cdot \tan \varphi}$$

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang ist der zwischen Gipfelhöhe und Gesamtflugzeit:

$$(10) \quad y_1 = \frac{g}{8} \cdot T^2$$

Man bestätigt diese Gleichung, indem man T nach Gl. 5) einsetzt, wonach sich wieder Gl. 8) ergibt. Die Gl. 10) wird als wichtige Näherungsformel für den Schuß im luftgefüllten Raum nochmals erwähnt werden (Seite 54).

Weiterhin erhält man durch Gleichsetzen der linken Seiten der Gl. 9) und 10):

$$\frac{1}{4} X \cdot \tan \varphi = \frac{g}{8} \cdot T^2,$$

daraus folgt für die Endflugzeit:

$$(11) \quad T = \sqrt{\frac{2 X \cdot \tan \varphi}{g} = 0,452} \cdot X \cdot \tan \varphi$$

Teilt man die unter beliebigem Abgangswinkel φ erreichte Schußweite X (Gl. 6a) durch die Höchstschußweite (Gl. 7), so erhält man:

$$(12) \quad \sin 2 \varphi = \frac{X}{X_{\max}}$$

Durch diese Gleichung ist der zu einer gegebenen Schußweite nötige Abgangswinkel bestimmt, dabei braucht nur die Höchstschußweite bekannt zu sein.

Die Flugbahngleichung läßt sich noch in eine Form bringen, die nicht mehr die v_0 , dafür aber die Schußweite X enthält.

Ersetzt man nämlich

$$\frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

(im letzten Glied der Gl. 3) nach Gl. 6), so erhält man:

$$y = x \cdot \tan \varphi - \frac{x^2 \cdot \sin \varphi}{X \cdot \cos \varphi} \text{ d. h.}$$

$$(13) \quad y = x \cdot \tan \varphi \left(1 - \frac{x}{X}\right) \quad \text{oder:}$$

$$(13a) \quad y = \frac{x}{X} (X - x) \cdot \tan \varphi$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich Näherungsausdrücke für den Schuß im luftgefüllten Raum herleiten (s. Seite 60).

II. Schießen gegen Ziele außerhalb der Abgangsebene.

Wird nicht auf eine waagerechte, sondern auf eine unter dem Winkel β (Geländewinkel) geneigte Ebene geschossen, so ändern sich Schußweite und Flugzeit. Der Punkt, in dem die Flugbahn auf das ansteigende Gelände aufschlägt, sei Z , die Flugzeit bis dahin T_z (s. Bild 3).

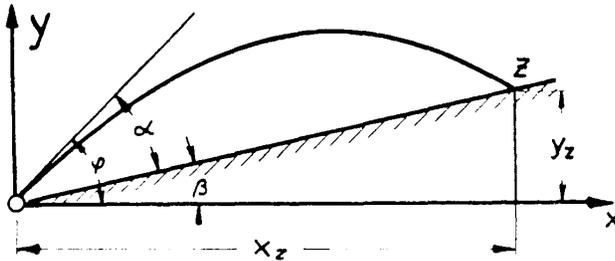


Bild 3: Wurf auf eine Ebene, die unter dem Winkel β (Geländewinkel) ansteigt.

Zwischen den Koordinaten des Aufschlagpunktes, x_z und y_z , besteht zunächst die Beziehung:

$$y_z = x_z \cdot \tan \beta$$

Weiterhin gelten für Punkt Z die Gleichungen 1) und 2) mit $t = T_z$. Ersetzt man hiernach y_z und x_z der obigen Gleichung, so hat man:

$$v_0 \cdot \sin \varphi \cdot T_z - \frac{g}{2} T_z^2 = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot T_z \cdot \tan \beta.$$

Löst man diese Gleichung nach T_z auf, so erhält man (neben der selbstverständlichen, für den Nullpunkt gültigen Lösung: $T_z = 0$):

$$T_z = \frac{2 v_0}{g} (\sin \varphi - \cos \varphi \cdot \tan \beta)$$

oder, nach Erweitern mit $\cos \beta$

$$T_z = \frac{2 v_0}{g \cdot \cos \beta} (\sin \varphi \cdot \cos \beta - \cos \varphi \cdot \sin \beta)$$

Der Klammerinhalt ist aber nichts anderes als: $\sin(\varphi - \beta)$. Man hat also:

$$T_z = \frac{2 v_0}{g \cdot \cos \beta} \cdot \sin(\varphi - \beta)$$

Setzt man diesen Wert von T_z in Gl. 1) ein, so erhält man:

$$x_z = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot \frac{2 v_0}{g \cdot \cos \beta} \cdot \sin(\varphi - \beta)$$

Und da die Schrägschußweite $O - Z = x_z \cdot \frac{1}{\cos \beta}$ ist,

(14)

$$O - Z = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin(\varphi - \beta) \cdot \cos \varphi}{g \cdot \cos^2 \beta}$$

Führt man für $(\varphi - \beta)$ den Winkel α ein, den die Ziellinie mit der Abgangsrichtung einschließt (er ist, wenn man den in der Praxis noch hinzutretenden Abgangsfehler vernachlässigt, gleich dem Aufsatzwinkel), so erhält man:

(14a)

$$O - Z = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}{g \cdot \cos^2 \beta}$$

Die Frage, welche Abgangsrichtung beim Schießen auf eine geneigte Ebene die größte Schrägschußweite $O - Z$ ergibt, läßt sich ohne Differentialrechnung lösen. In Gl. 14) ändert sich mit der Erhöhung nur die im Zähler stehende Größe: $\sin(\varphi - \beta) \cdot \cos \varphi$; es ist also festzustellen, für welches φ dieses Produkt seinen größten Wert hat. Nach der bekannten goniometrischen Formel:

$$2 \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma - \delta}{2} = \sin \gamma - \sin \delta$$

ist:

$$2 \sin(\varphi - \beta) \cdot \cos \varphi = \sin(2\varphi - \beta) - \sin \beta$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist wiederum nur der erste Summand, $\sin(2\varphi - \beta)$ mit φ veränderlich, er ist am größten, wenn $\sin(2\varphi - \beta) = 1$, also $2\varphi - \beta = 1600''$ ist. Das bedeutet für den Abgangswinkel, der die größte Schußweite ergibt:

$$(15) \quad \boxed{\varphi_{X_{\max}} = 800'' + \frac{\beta}{2}}$$

$\varphi_{X_{\max}}$ gleich einem halben Rechten, vermehrt um den halben Geländewinkel, bedeutet aber:

Beim Wurf auf eine vom Wurfort aus geneigte Ebene erhält man die größte Wurfweite, wenn die Anfangsrichtung den Winkel zwischen der Senkrechten und der Ebene, auf die geworfen wird, halbiert.

(Man erkennt leicht, daß die Erhöhung $800''$, die beim Wurf auf waagerechter Ebene am weitesten führt, sich aus dem einfachsten Sonderfall dieses Satzes ergibt.)

Selbstverständlich gelten alle Gedankengänge sinngemäß auch für nach abwärts geneigtes Gelände, also für negative Werte von β , siehe Rechenbeispiel 2, Seite 21).

Soll mit gegebener v_0 ein Punkt (Koordinaten: x, y) außerhalb der Abgangsebene getroffen werden, so findet man die hierzu erforderliche Erhöhung folgendermaßen:

Im letzten Glied der allgemeinen Flugbahngleichung (Gl. 3) ersetzt man

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \quad \text{durch} \quad 1 + \tan^2 \varphi$$

und erhält:

$$y = x \cdot \tan \varphi - \frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \varphi)$$

Löst man diese quadratische Gleichung nach $\tan \varphi$ auf, so ergibt sich:

$$(16) \quad \boxed{\tan \varphi = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2 x^2 (1 + \frac{2 v_0^2 \cdot y}{g x^2})}}{g \cdot x}}$$

Damit ist diejenige Erhöhung bestimmt, die eine Flugbahn durch einen Punkt von gegebener Lage (x, y) hindurchführt. Das doppelte Vorzeichen vor der Wurzel zeigt, daß auch hier, ebenso wie in der Abgangsebene (untere und obere Winkelgruppe!) im allgemeinen zwei Erhöhungen die Aufgabe lösen. Wird der Wert unter der Wurzel negativ, so kann das Ziel mit der gegebenen v_0 nicht getroffen werden.

Für die Zeit t , in der das Geschöß einen Flugbahnpunkt erreicht, läßt sich ein Ausdruck angeben, der nicht mehr, wie Gl. 1) oder 2), die v_0 enthält:

Teilt man beide Seiten der Gl. 5) durch t , so erhält man:

$$\frac{T}{t} = \frac{2 v_0 \cdot \sin \varphi}{g \cdot t}$$

und nach Erweitern der rechten Seite mit $t/2$:

$$\frac{T}{t} = \frac{v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi}{g/2 \cdot t^2}$$

Diese Verhältnisgleichung läßt sich auf einfache Weise geometrisch — anschaulich deuten:

Es gilt: $\frac{T}{t} = \frac{a}{b}$, da $a = v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi$ und $b = \frac{g}{2} t^2$ (s. Bild 4).

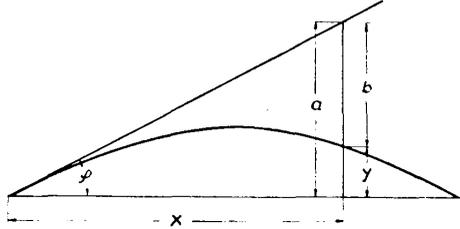


Bild 4: Zur Herleitung der Gleichung für die Flugzeit.

Nimmt man beiderseits die reziproken Werte und ersetzt die Größen der rechten Seite durch die Koordinaten des Flugbahnpunktes x und y , so hat man:

$$\frac{t}{T} = \frac{x \cdot \tan \varphi - y}{x \cdot \tan \varphi} = 1 - \frac{y}{x \cdot \tan \varphi}$$

Das gibt schließlich:

(17)

$$t = T \left(1 - \frac{y}{x} \cdot \cot \varphi \right)$$

Diese Gleichung kann (mit einer Korrekturgröße) auch zum angenäherten Ermitteln der Flugzeit im luftgefüllten Raum verwendet werden (s. S. 65 ff).

III. Zusammenstellung der Formeln für den Wurf im luftleeren Raum.

Soweit die nachstehenden Formeln in den vorausgehenden Abschnitten nicht abgeleitet sind, ergeben sie sich durch Kombinieren der bewiesenen Gleichungen oder durch Differenzieren.

1. Beliebiger Flugbahnpunkt.

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \varphi = \frac{X}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4y}{X \cdot \tan \varphi}} \right)$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{g}{2} t^2 = x \cdot \tan \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$= x \cdot \tan \varphi - \frac{g}{2} t^2 = x \cdot \tan \varphi \left(1 - \frac{x}{X} \right)$$

$$= \frac{x}{X} (X - x) \cdot \tan \varphi = \frac{g}{2} \cdot t (T - t)$$

(ϑ = Winkel zwischen Flugbahntangente und positiver x -Achse; im absteigenden Ast ist $\vartheta > 90^\circ$, $\tan \vartheta$ also negativ):

$$\tan \vartheta = \tan \varphi - \frac{g \cdot t}{v_0 \cdot \cos \varphi} = \tan \varphi - \frac{g x}{v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$= \tan \varphi \left(1 - \frac{2x}{X} \right) = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\cos \vartheta = \cos \varphi \cdot \frac{v_0}{v} = \frac{v_x}{v}$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \varphi} = T \left(1 - \frac{y}{x} \cdot \cot \varphi \right)$$

$$v = v_0 \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta} = \sqrt{v_0^2 - 2g y} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos \varphi = \text{konstant} = v \cdot \cos \vartheta$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \varphi - g t = v_0 \cdot \sin \varphi - \frac{g x}{v_0^2 \cdot \cos \varphi} = \sqrt{2g(y_g - y)}$$

2. Gipfel (Scheitel).

$$x_g = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{2g} = \frac{X}{2} = h \cdot \sin 2\varphi,$$

(h = größte Steighöhe, bei $\varphi = 45^\circ = 90^\circ$)

$$y_g = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g} = h \cdot \sin^2 \varphi = \frac{X}{4} \cdot \tan \varphi$$

$$= \frac{x_g}{2} \cdot \tan \varphi = \frac{g}{8} \cdot T^2 = 1,23 T^2$$

$$y_g(\max) = h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2} \cdot X_{\max}$$

$$t_g = \frac{v_0 \cdot \sin \varphi}{g} = \frac{x_g}{v_0 \cdot \cos \varphi} = \frac{T}{2}$$

$$v_g = v_x = v_0 \cdot \cos \varphi = \frac{X}{T}$$

3. Mündung.

$$v_0 = \frac{x}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{\frac{g}{2(y - x \cdot \tan \varphi)}}$$

$$\tan \varphi = \frac{v_0^2}{g x} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x^2} - \left(1 + \frac{2 v_0^2 \cdot y}{g x^2} \right)}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{X}{X_{\max}}$$

$$\varphi(x_{\max}) = 90^\circ = 45^\circ$$

4. Fallpunkt ($y = 0$).

$$X = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g} = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot T = 2 x_g = \frac{g}{2} T^2 \cdot \cot \varphi$$

$$X_{\max} = \frac{v_0^2}{g}, \text{ für } \varphi = 45^\circ = 90^\circ$$

$$T = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \varphi}{g} = \left[\frac{2}{g} \cdot X \cdot \tan \varphi = 0,452 \right] X \cdot \tan \varphi$$

$$\omega = \varphi$$

5. Aufschlagpunkt Z außerhalb der Abgangsebene.

(s. Bild 3)

β = Geländewinkel, α = Aufsatzwinkel

$$T_z = \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g \cdot \cos \beta} = \frac{2 v_0 \cdot \sin (\varphi - \beta)}{g \cdot \cos \beta}$$

$$x_z = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin (\varphi - \beta)}{g \cdot \cos \beta} = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos (\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha}{g \cdot \cos \beta}$$

$$\text{Schrägschußweite } O - Z = \frac{x_z}{\cos \beta} = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin (\varphi - \beta)}{g \cdot \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{2 v_0^2 \cdot \cos (\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha}{g \cdot \cos^2 \beta}$$

$$\varphi(x_{\max}) = 80^\circ + \frac{\beta}{2} = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

IV. Rechenbeispiele für den Wurf ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

(Bei Abwurfgeschwindigkeiten, wie sie etwa bei den sportlichen Würfen auftreten, kann, bei nicht zu kleiner Querschnittsbelastung [s. Seite 26], die Wirkung des Luftwiderstandes im allgemeinen vernachlässigt werden.)

1. Für einen Rekordspeerwurf (Weite etwas über 80 m) sind v_0 , Abwurfswucht, Flugzeit und Gipfelhöhe angenähert zu ermitteln.

Ein Wurf von rund 82 m auf die Ebene, die etwa 1,80 m tiefer liegt als der Abwurfpunkt (die Stelle, an der der Speer die Hand verläßt), entspricht etwa 80 m in der Abgangsebene. Es wird daher mit $X = 80$ m gerechnet. φ liegt sehr nahe an 45° .

Aus Gl. 7) folgt:

$$v_0^2 = 9,81 \cdot 80, \text{ daraus: } v_0 = \underline{28 \text{ m/s.}}$$

Bei einem Gewicht des Speeres von 800 g ist die Abwurfswucht (s. Seite 11)

$$W = \frac{G}{2g} \cdot v_0^2 = \frac{0,8}{2 \cdot 9,81} \cdot 9,81 \cdot 80 = \underline{32 \text{ kg} \cdot \text{m.}}$$

d. h. gleich der Arbeit, die notwendig ist, um 32 kg einen Meter hoch zu heben.

Aus Gl. 9 folgt für die Gipfelhöhe (da $\tan \varphi \approx 1$)

$$y_g = \frac{X}{4} + 1,80 \text{ m} \quad (1,80 \text{ m} = \text{Abwurfhöhe});$$

der Gipfel der Wurfkurve liegt also rund **22 m** über dem Boden. Für die Flugzeit hat man nach Gl. 5)

$$T = \frac{2 \cdot 28 \cdot 0,707}{9,81} \approx \underline{4 \text{ s.}}$$

2. a) Ein Mann steht am oberen Rande der um 26° geneigten Uferböschung eines Sees, 60 m höher als der Wasserspiegel. Kann er die Wasserfläche durch einen Wurf mit einem Stein erreichen, wenn er imstande ist, einen Stein derselben Art auf ein Gelände, das so hoch liegt, wie seine Abwurfhand, 68 m weit zu werfen?

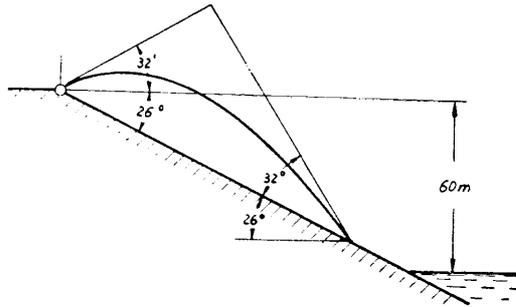


Bild 5: Zum Rechenbeispiel 2, (Wurf auf eine nach abwärts geneigte Ebene).

Aus der letzten Angabe erhält man die Geschwindigkeit, die dem Stein erteilt werden kann.

$$X_{\max}, \text{ waagrecht} = 68 \text{ m},$$

hieraus nach Gl. 7):

$$v_0^2 = 9,81 \cdot 68, \quad v_0 = 25,82 \text{ m/s}$$

Der Geländewinkel β ist negativ, $\beta = -26^\circ$.

Am weitesten führt der Wurf mit

$$\varphi = 45^\circ + \frac{\beta}{2} = 45^\circ + \left(\frac{-26^\circ}{2}\right) = 32^\circ.$$

(Die Abwurfrichtung mit $\varphi = 32^\circ$ halbiert den Winkel zwischen der Senkrechten und der Böschungsrichtung.) Damit wird die größte Schrägwurfweite nach Gl. 14):

$$O - Z = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos 32^\circ \cdot \sin(32^\circ + 26^\circ)}{9,81 \cdot \cos^2 26^\circ} = \underline{\underline{121 \text{ m}}}.$$

Der Betrag h , um den die Aufschlagstelle Z tiefer liegt als der Standpunkt O , ergibt sich aus:

$$h = 121 \cdot \sin 26^\circ = \underline{\underline{53 \text{ m}}}.$$

Der Wurf kann die Wasserfläche also nicht erreichen!

b) Wie hoch liegt der Gipfel der Flugbahn über dem Abwurfpunkt?

Nach Gl. 8) erhält man:

$$y_g = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 32^\circ}{2 \cdot 9,81} = \underline{\underline{9,55 \text{ m}}}.$$

c) Wie groß sind im Aufschlagpunkt Z die Komponenten (Anteile in der x - und y -Richtung) der Geschwindigkeit? Wie groß ist die Aufschlaggeschwindigkeit?

$$\text{(Gl. 4):} \quad v_x = v_0 \cdot \cos \varphi = 25,8 \cdot \cos 32^\circ = \underline{\underline{21,92 \text{ m/s}}}.$$

$v_y = \sqrt{2g(y_g - y)}$, d. h. v_y ist ebenso groß, wie wenn der Körper die Höhendifferenz zwischen dem Gipfel und dem betrachteten Punkt senkrecht durchfallen hätte (Unabhängigkeitsprinzip s. Seite 12).

$$v_y = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 62,55} = \sqrt{1228} = \underline{\underline{35,04 \text{ m/s.}}}$$

Die ganze Aufschlaggeschwindigkeit v ist die geometrische oder Vektorsumme der Anteile:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{480,5 + 1228} = \underline{\underline{41,33 \text{ m/s.}}}$$

Zur Kontrolle kann v auch nach dem Energiesatz bestimmt werden. Er lautet in diesem Fall:

$$G \cdot y + \frac{G}{2g} \cdot v^2 = \frac{G}{2g} \cdot v_0^2,$$

daraus folgt:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} = \sqrt{666,7 - 2 \cdot 9,81 \cdot (-53)} = \sqrt{1708} = \underline{\underline{41,3 \text{ m/s.}}}$$

d) Unter welchem Winkel schlägt der Stein bei Z auf das Gelände auf?

Zunächst wird der Auftreffwinkel (Winkel unter dem die Flugbahn die durch Z gelegte Waagerechte schneidet = ω_1) berechnet, er ergibt sich aus:

$$\tan \omega_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{35,04}{21,92} = 1,600$$

zu: $\omega_1 = 58^\circ$.

*) (Zur Probe dasselbe durch Differenzieren der Gl. 3):

$$y' = \tan \varphi - \frac{g x}{v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}, \quad x = 121 \cdot \cos 26^\circ$$

$$y' = \tan(-\omega_1) = \tan 32^\circ - \frac{9,81 \cdot 121 \cdot \cos 26^\circ}{v_0^2 \cdot \cos^2 32^\circ}$$

$$= 0,625 - 2,225 = -1,600, \quad \omega_1 = 58^\circ, \text{ wie oben.}$$

Es ist übrigens kein Zufall, daß der Auftreffwinkel die Erhöhung zu 90° ergänzt, sondern das ist, wie sich beweisen läßt, bei jeder „weitestreichenden“ Flugbahn im luftleeren Raum der Fall. Bei jeder solchen Bahn stehen Anfangs- und Endtangente aufeinander senkrecht, s. Bild 5.

Der Aufschlagwinkel ist nun: $58^\circ - 26^\circ = 32^\circ$.

Er ist ebenso groß wie die Erhöhung; auch das gilt für jede weitestreichende Flugbahn (ohne Luftwiderstand) auf schiefer Ebene.

e) Wieviel an Wurflweite geht verloren, wenn der Stein in waagerechter Richtung abgeworfen wird?

$$O - Z = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin 26^\circ}{g \cdot \cos^2 26^\circ} = 73,7 \text{ m.}$$

Es würden also nicht 121 m, sondern nur 73,7 m erreicht; d. h. 47,3 m weniger, als bei der günstigsten Abwurfrichtung.

V. Die Erhöhung beim direkten Richten. — Das Schwenken der Flugbahn. — Geländewinkel und Libelleneinstellung.

Die Gleichung 14a) (s. Seite 16) ist wichtig zum Verständnis des sogenannten „Schwenkens der Flugbahn“, auf dem das direkte Richten nach Zielen über oder unter der Abgangsebene beruht. Dabei wird bekanntlich die Ziellinie (Sehlinie) auf das Ziel gerichtet; das Rohr bekommt seine Erhöhung dadurch, daß an die Ziellinie der am Aufsatz eingestellte Winkel nach oben angetragen wird. Dieser Aufsatzwinkel (Winkel α in Bild 3 und Bild 6) wäre, genau genommen, von der Entfernung des Zieles und von dessen Höhenlage abhängig; praktisch bemißt man ihn

nur nach der Schrägentfernung ($O - Z$) des Ziels, und zwar derart, daß er als Abgangswinkel beim Schießen auf waagerechtes Gelände dort die Schußweite $O - Z$ ergeben würde. Man nimmt also die Gesamterhöhung, indem man die für die Abgangsebene gültige Aufsatzerhöhung um den Geländewinkel (β in Bild 6) vergrößert, bzw. verkleinert. Das wäre dann genau richtig, wenn die Flugbahn starr über der Ziellinie „befestigt“ wäre und mit dieser auf- und abwärts geschwenkt werden könnte, ohne sich dabei zu verformen, d. h., wenn man die Flugbahn 1 (in Bild 6) ohne jede Verformung nur durch Drehen um den Winkel β in die Flugbahn 2 überführen könnte.

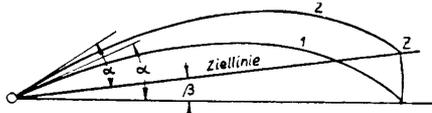


Bild 6: Zum „Schwenken der Flugbahn“.

Rechnerisch bedeutet das, daß die Schrägschußweite $O - Z$ nach (Gl. 14a) gleich der waagerechten Schußweite X (nach Gl. 6) gesetzt wird, daß also die Gültigkeit der Gleichung angenommen wird:

$$\frac{2 v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos (\alpha + \beta)}{g \cdot \cos^2 \beta} = \frac{2 v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

oder, nach Wegheben derjenigen Größen, die tatsächlich auf beiden Seiten gleich sind:

$$\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} = \cos \alpha$$

Diese Gleichung ist sicher im allgemeinen nicht gültig, man macht aber, wenn man sie als zutreffend annimmt, in den beiden folgenden Fällen nur kleine Fehler:

1. Bei kleinem Geländewinkel β

Man sieht, daß der Wert der linken Seite sich dem der rechten nähert, wenn β sehr klein wird.

$$[\cos^2 \beta \rightarrow 1, \quad \cos (\alpha + \beta) \rightarrow \cos \alpha]$$

Die praktisch vorkommenden Geländewinkel sind in der Regel klein, so daß das Schwenken der Flugbahn nur kleine Schußweitenfehler ergibt. Diese können um so eher in Kauf genommen werden, als Schießen mit direktem Richten immer beobachtete Schießen sind.

2. Bei flacher Flugbahn.

d. h. bei Werten von α , die (grob angegeben) der unteren Hälfte der unteren Winkelgruppe angehören. Davon überzeugt man sich leicht am Beispiel:

a) Flache Flugbahn: $\alpha = 150^\circ$, $\beta = 20^\circ$

$$\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} = \frac{\cos 170^\circ}{\cos^2 20^\circ} = \frac{0,9861}{0,9998^2} = \underline{\underline{0,9865}}$$

$$\cos \alpha = \cos 150^\circ = \underline{\underline{0,9892}}$$

Nimmt man diese beiden Werte als gleichgroß an, so macht man einen Fehler von 0,27%. Bei flacher Flugbahn ist also, wie das Beispiel zeigt, der Fehler auch dann unbedeutend, wenn β durchaus nicht verschwindend klein ist.

b) Flugbahn mit größerem α , derselbe Geländewinkel wie beim obigen Beispiel: $\alpha = 700^\circ$, $\beta = 20^\circ$

$$\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} = \frac{0,7604}{0,9998^2} = \underline{\underline{0,7607}}$$

$$\cos \alpha = \cos 700^\circ = \underline{\underline{0,7730}}$$

Hier, bei diesem verhältnismäßig großen α , würde mit dem Gleichsetzen der beiden Werte schon ein Fehler von 1,6% gemacht, also ein rund 6mal so großer prozentualer Fehler wie bei der flachen Flugbahn mit $\alpha = 150''$.

Wenn in der Praxis direkt gerichtet wird, so handelt es sich fast durchweg um Schießen mit flacher Flugbahn. Das folgt schon aus der Art der dabei in Betracht kommenden Ziele (meist bewegliche Ziele, insbesondere Panzer, für deren Bekämpfung die große bestrichene Entfernung der flachen Flugbahn wichtig ist). Praktisch wird also auch diese Bedingung für die Zulässigkeit des direkten Richtens, nämlich die flache Flugbahn, meist erfüllt sein.

Streng genommen erhält man beim direkten Richten auf ein Ziel über der Abgangsebene in der Regel Kurzschüsse (das entspricht der Tatsache, daß beim indirekten Richten auf Ziele über der Abgangsebene der genaue, d. h. nicht auf ganze Libellentteile abgerundete Libellenwert in der Regel größer ist als der Geländewinkel, s. weiter unten), beim Schießen auf Ziele unter der Abgangsebene Weitschüsse.

Diese Überlegungen gelten auch, sinngemäß abgewandelt, für den Schuß im luftgefüllten Raum.

Über das indirekte Richten nach Zielen über oder unter der Abgangsebene ist folgendes zu sagen: Mit der Erhöhung φ_1 werde in der Abgangsebene die Schußweite X erreicht. Will man nun mit derselben v_0 ein Ziel auf derselben Kartenentfernung X , jedoch außerhalb der Abgangsebene treffen, so muß man hierzu eine andere Gesamterhöhung, φ_2 , wählen. Der Unterschied dieser beiden Erhöhungen, d. h. der Winkel, um den man im vorliegenden Falle die Abgangsrichtung heben bzw. senken muß, wird in der Regel der Libellentafel entnommen. Er ist nicht nur, wie der Geländewinkel, von der Entfernung und der Höhenlage des Ziels, sondern auch von der Form der Flugbahn abhängig, ändert sich also bei gleicher Lage des Ziels im allgemeinen von Ladung zu Ladung. Wird statt dieses der Libellentafel zu entnehmenden Winkels der Geländewinkel (β) an der Libelle eingestellt und somit der Erhöhung hinzugefügt, so entspricht dies weitgehend dem beschriebenen direkten Richten auf ein Ziel außerhalb der Abgangsebene. Ein solches Verfahren schwenkt zwar die Ziellinie genau um den Betrag des Geländewinkels, ist aber für das Heben oder Senken der Flugbahn nur als Näherung innerhalb gewisser Grenzen zulässig. Über den Bereich, in dem es auch auf die Flugbahn angewandt werden kann, wird man sich leicht an Hand der Libellentafel klar: Bei kleinen Geländewinkeln und flachen Flugbahnen sind die auf ganze Strich abgerundete Libellenbeträge (d. h. selbstverständlich die Überschüsse über 300) gleich dem Geländewinkel, d. h. sie folgen der Strichregel:

$$\operatorname{tg} 1'' \approx \frac{1}{1000}$$

Bei größeren Höhenunterschieden und gegen Ende des Schußweitenbereiches jeder Ladung dagegen unterscheidet sich der Libellenwert wesentlich vom Geländewinkel; bei Zielen über der Abgangsebene ist er in den zuletzt genannten Bereichen nennenswert größer als dieser.

Man kann übrigens — das ist teilweise im Ausland üblich — die Libelleneinstellung in zwei Teilgrößen aufspalten, die getrennt ermittelt und dann zur Einstellung am Geschütz zusammengezählt werden: Erstens den Geländewinkel, der sich nach der Strichregel ergibt und für den die Kartenentfernung maßgebend ist, und zweitens einen Zusatzwert für die Hebung der Flugbahn, der von der jeweiligen Aufsatzentfernung (Erhöhung) abhängt. Der letztgenannte Zusatzwert ist — alles hier ausgeführt bezieht sich zunächst auf die untere Winkelgruppe — im allgemeinen zahlenmäßig kleiner als der Geländewinkel (s. die Libellentafel: Der Libellenwert beträgt im Bereich der Libellentafel fast durchweg weniger als das Doppelte des Geländewinkels). Man legt deshalb, wenn man wie in Deutschland die Libelleneinstellung in einem Wert ermittelt, praktischerweise die Kartenentfernung (nicht die Aufsatzentfernung) zu Grunde, da sich nach ihr der in der Regel wesentlich größere Anteil, nämlich der Geländewinkel, richtet.

Bei der oberen Winkelgruppe haben Libellenwert und Geländewinkel sogar entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. ein Ziel über der Abgangsebene verlangt eine Libelleneinstellung unter 300 (und umgekehrt). Man mache sich das durch folgende Überlegung klar: Mit einer gewissen Aufsatzentfernung und mit Libelle 300 werden zunächst ein Ziel in der Abgangsebene getroffen (Bild 7, Flugbahn 1).

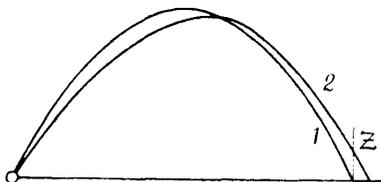


Bild 7: Beim Schießen in der oberen Winkelgruppe muß man, um ein Ziel (Z) über der Abgangsebene zu treffen, die Gesamterhöhung verkleinern.

Geht man nun ohne die AufsatzEinstellung zu ändern zu einer kleineren Libelle über, so verkleinert man damit die Gesamterhöhung; die neue Flugbahn (Flugbahn 2) würde auf der Abgangsebene eine größere Schußweite ergeben, sie schneidet also eine in der Entfernung des ursprünglichen Ziels befindliche senkrechte Troßfläche über der Abgangsebene.

Ein Ziel, dessen Kartenentfernung gleich der Höchstschußweite ist, und das auch nur wenig über der Abgangsebene liegt, kann durch keine Änderung der Erhöhung getroffen werden (jedes Vergrößern der Erhöhung führt in die obere Winkelgruppe hinein und verkürzt die Schußweite), wohl aber ein solches, das beliebig tief unter der Abgangsebene liegt.

B. Der Schuß im luftgefüllten Raum.

I. Der Luftwiderstand.

a) Die Größen, von denen der Luftwiderstand in erster Linie abhängt. Die Verzögerung des Geschosses durch den Luftwiderstand.

In Wirklichkeit greift außer der Schwerkraft der Luftwiderstand als weitere Kraft am Geschöß an. Wenn das Geschöß sich im Flug in der Richtung seiner Längsachse bewegt (eine Annahme, die in diesem Abschnitt auch weiterhin gelten soll), so hat der Luftwiderstand entlang der ganzen Flugbahn die Richtung der Bahntangente, entgegengesetzt der Geschößbewegung; er sucht stets die jeweilige Geschößgeschwindigkeit zu verringern.

Der Betrag des Luftwiderstandes hängt in erster Linie von den folgenden Größen ab:

1. Vom Geschößquerschnitt ($R^2 \pi$ oder $\frac{D^2}{4} \cdot \pi$, dabei ist R das halbe, D das ganze Kaliber).
2. Vom spezifischen Gewicht — der Wichte — der Luft: δ . Es ist einleuchtend, daß das Geschöß mehr Arbeit aufwenden muß, wenn mehr Luftteilchen in der Raumeinheit vorhanden sind. Da δ mit zunehmender Höhe abnimmt, ändert sich auch der Luftwiderstand mit der Höhe.
3. Von der Form des Geschosses (Näheres siehe S. 31 und S. 39).
4. Von der Geschößgeschwindigkeit (v).

Nach der Lehrschußtafel beträgt z. B. die Schußweite bei 266— Erhöhung in der ersten Ladung 1710 m gegen 1850 m, die im luftleeren Raum bei derselben v_0 und Erhöhung erreicht würden. In der 5. Ladung ist die Schußweite bei derselben Erhöhung 4840 m gegen 6980 m im luftleeren Raum. Die Schußweite wird also durch den Luftwiderstand bei der kleinen v_0 (191 m/s) um 7,6%, bei der größeren (370 m/s) um 30,7% verkleinert. Man erkennt aus diesen Zahlen, daß der Luftwiderstand mit wachsender Geschößgeschwindigkeit stark ansteigt. (Näheres s. Seite 27 ff.)

Es ist in der Ballistik im allgemeinen üblich, den Luftwiderstand W folgendermaßen (etwas abweichend von der in der Aerodynamik gebräuchlichen Form) rechnerisch anzusetzen:

(18)

$$W \text{ [in kg]} = (R^2 \pi) \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot i \cdot f(v)$$

Hierin ist $R^2 \pi$ der Geschoßquerschnitt (in cm^2), $\frac{\delta}{\delta_0}$ das Verhältnis der jeweils vorliegenden zur Normalluftwichte δ_0 (die Normalluftwichte ist zu $1,22 \text{ kg/m}^3$ festgesetzt), i ein Faktor, der den Einfluß der Geschoßform rechnerisch erfafßt, $f(v)$ eine Rechengröße die nur von der Geschwindigkeit abhängt und auf die im nächsten Abschnitt noch näher eingegangen wird.

Dem Ansatz der Gleichung 18) liegt die Annahme zugrunde, daß sich die oben unter 1. bis 4. angeführten Abhängigkeiten als Faktoren eines Produkts getrennt verrechnen lassen. Das ist allerdings nur eine Näherung, in Wirklichkeit sind die verschiedenen Einflüsse nicht derart streng voneinander zu scheiden (s. S. 31).

Nach dem Grundgesetz der Mechanik (Kraft = Masse mal Beschleunigung bzw. Verzögerung) bewirkt die Kraft W des Luftwiderstandes folgende Verzögerung w des Geschosses:

$$w = \frac{W}{M} = \frac{W \cdot g}{G}$$

(G = Geschoßgewicht)

also (W nach Gl. 18) eingesetzt):

(18a)

$$w \text{ [in m/s}^2\text{]} = \frac{R^2 \pi}{G} \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot i \cdot f(v) \cdot g$$

Hier, bei der Verzögerung, tritt als erster Faktor nicht mehr der Querschnitt auf, sondern der Kehrwert (reziproke Wert) der sogenannten Querschnittsbelastung.

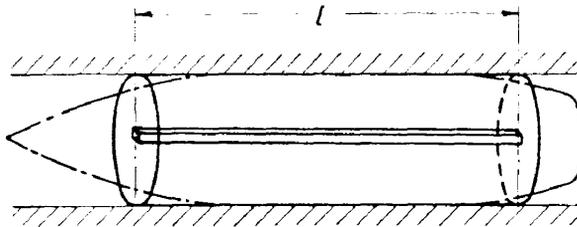


Bild 8: Zur Querschnittsbelastung.

[Querschnittsbelastung (in kg/cm^2) = Geschoßgewicht geteilt durch den Geschoßquerschnitt, oder derjenige Teil des Geschoßgewichts, der auf die Flächeneinheit des Querschnitts entfällt. Der Begriff wird anschaulich dadurch (s. Bild 8), daß man sich das Geschoss zunächst an Spitze und Endkonus zu einem kalibergleichen Zylinder von der Länge l zusammengestaucht denkt und aus diesem Zylinder ein Prisma von der Bodenfläche 1 cm^2 herausschneidet. Das Gewicht dieses Prismas ist gleich der Querschnittsbelastung. Diese ist natürlich um so größer, je länger das Geschoss ist; bei ähnlich gebauten Geschossen (das sind innerhalb gewisser Grenzen alle Artilleriegeschosse) ist sie, ebenso wie die Geschosslänge, dem Kaliber proportional.]

Die Gl. 18a) sagt aus, daß ein Geschoss um so weniger auf seinem Flug verzögert wird, je größer seine Querschnittsbelastung ist. Möglichst hohe Querschnittsbelastung ist also für das Überwinden des Luftwiderstandes (ebenso wie für das Eindringen in ein Ziel) günstig!

Abkürzend faßt man diejenigen Größen der Gl. 18a), die nicht von der Geschossgeschwindigkeit abhängen, zu dem „ballistischen Koeffizienten“ c zusammen und setzt:

$$c = \frac{R^2 \pi \cdot g \cdot i \cdot \delta}{G \cdot \delta_0}$$

Damit erhält man für die Verzögerung w :

(18b)

$$w = c \cdot f(v)$$

und für den Luftwiderstand W :

(18c)

$$W = \frac{G}{g} \cdot c \cdot f(v)$$

b) Das Zustandekommen des Luftwiderstandes und seine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Die sogenannte Luftwiderstandsfunktion $f(v)$, die die gesamte Geschwindigkeitsabhängigkeit des Luftwiderstandes zusammenfassen soll, gibt den Luftwiderstand in kg an, der auf ein Normalgeschöß ($i = 1$) von 1 cm^2 Querschnitt bei normalem Luftgewicht wirkt. (S. Bild 9.)

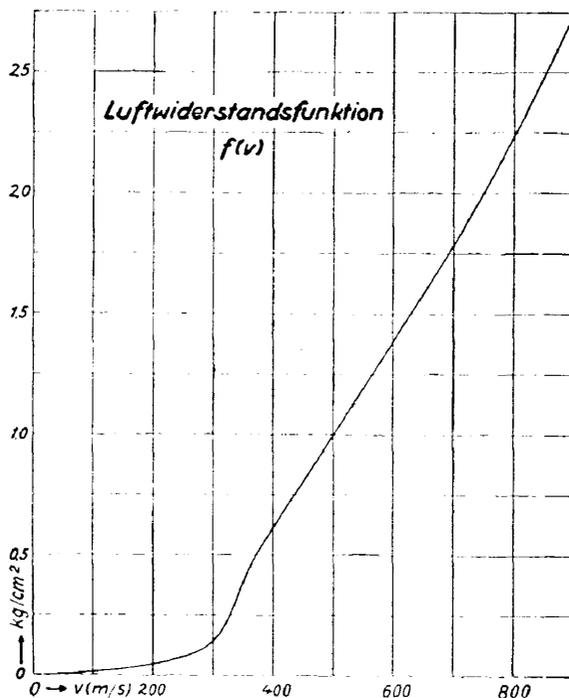


Bild 9.

Sie ist für bestimmte Geschosse durch Versuche bestimmt. Daß ihr Ansteigen mit der Geschwindigkeit mit einer höheren Potenz als der ersten erfolgt, wird durch folgende vereinfachende Überlegung anschaulich: Ein Geschöß, das doppelt so schnell fliegt wie ein anderes, wird nicht nur in der Zeiteinheit doppelt so viel Luftteilchen anstoßen wie dieses, sondern allen diesen angestoßenen Teilchen auch jeweils etwa die doppelte Beschleunigung erteilen. Über den tatsächlichen Zusammenhang der Luftwiderstandsfunktion mit der Geschwindigkeit sei hier nur angedeutet, daß sie

im allgemeinen für kleine Geschwindigkeiten (unter 100 m/s) und dann wieder für sehr große (über 1000 m/s) dem Quadrat der Geschwindigkeit annähernd proportional ist. (Allerdings ist im zweiten Fall der Proportionalitätsfaktor wesentlich größer.)

In diesen Bereichen gilt also annähernd das sogenannte quadratische Luftwiderstandsgesetz.

Besonders steil verläuft die $f(v)$ -Kurve in der unmittelbaren Umgebung der Schallgeschwindigkeit, d. h. der Luftwiderstand wächst besonders stark an, wenn die Geschwindigkeit diese Grenze überschreitet. Dieser Verlauf der Luftwiderstandsfunktion erklärt sich aus dem Wesen des Luftwiderstandes, von dessen Zustandekommen wir uns folgende Vorstellung machen können: Am fliegenden Geschöß bilden sich Druckunterschiede aus, d. h. es entsteht an der Vorderseite ein Überdruck, hinter dem Geschößboden dagegen ein Gebiet verminderten Druckes, der sogenannte Sog (selbstverständlich wirkt der Sog nicht für sich allein, sondern nur in Verbindung mit größerem Druck von der Stirnseite). Außerdem entstehen infolge der Reibung, die zwischen der Geschößoberfläche und der Luft sowie zwischen den Luftteilchen unter sich herrscht, Wirbel. Das Andrehen dieser Wirbel, die sich am hinteren Geschößende ablösen, während vorn immer neue Luftteilchen erfaßt werden, verlangt Arbeit, die der Bewegungsenergie des Geschößes verloren geht (s. hierzu die Ausführungen auf Seite 39 über die Geschößform). Diese beiden Anteile des Luftwiderstandes, d. h. sowohl der Druck- und Sogwiderstand als auch der Wirbelwiderstand, wirken bei allen, auch bei kleineren Geschößgeschwindigkeiten. Liegt jedoch die Geschößgeschwindigkeit über der Schallgeschwindigkeit, so tritt noch — hierin liegt der Grund für das überaus starke Anwachsen des Luftwiderstandes — der sogenannte Wellenwiderstand hinzu. Es entsteht nämlich in diesem Fall (s. Seite 38) die sogenannte Kopfwelle; d. h. das Geschöß muß eine erhebliche Arbeit zusätzlich aufwenden, um eine Welle zu erzeugen, die bei kleineren Geschößgeschwindigkeiten nicht zustande kommt.

Teilt man die Werte von $f(v)$ Punkt für Punkt durch v^2 , so erhält man die neue Funktion $f(v)/v^2 = K(v)$. Diese Funktion (s. Bild 10 und Tabelle auf S. 29) zeigt besonders deutlich die Abweichung des wirklichen Verlaufs des Luftwiderstandes vom quadratischen Luftwiderstandsgesetz (soweit das quadratische Gesetz gilt, verläuft sie als waagerechte Gerade, wächst der Luftwiderstand stärker an als mit dem Quadrat der Geschößgeschwindigkeit, so steigt sie nach rechts an) und damit auch das starke Anwachsen des Luftwiderstandes in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit.

Der in Tabellen niedergelegten Funktion $K(v)$ bedient man sich meist bei der praktischen ballistischen Rechnung.

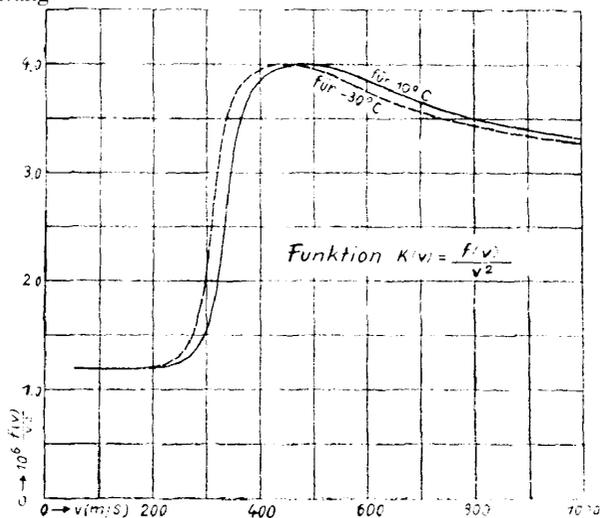


Bild 10: Die Funktion $K(v)$ bei zwei verschiedenen Lufttemperaturen. Text s. S. 28 und S. 30.

Die nachstehende Tabelle gibt nochmals die Werte der Funktion $K(v) = \frac{f(v)}{v^2}$, die auch Bild 10 zeigt, an. (Tabelle und graphische Darstellung gelten genau für das sogenannte Kruppsche Normalgeschöß mit dem Formwert $i = 1$ und dem Kaliber 10 cm, s. auch S. 31. Ihre Werte lassen sich aber, mit nicht allzu großer Einbuße an Genauigkeit, nach Gl. 18) oder 18a) auch auf andere Verhältnisse übertragen.)

Wertetabelle der Funktion $K(v)$

v (m/s)	$10^6 \cdot K(v)$						
150	1,190	330	2,391	450	3,981	900	3,400
200	1,195	340	2,822	500	3,998	950	3,357
220	1,203	350	3,174	550	3,941	1000	3,320
240	1,225	360	3,427	600	3,852	1050	3,289
260	1,270	370	3,605	650	3,740	1100	3,267
280	1,363	380	3,722	700	3,647	1200	3,244
300	1,551	390	3,792	750	3,568	1300	3,240
310	1,730	400	3,843	800	3,502		
320	2,010	410	3,883	850	3,448		

Beispiele für die Verwendung der Tabelle:

1. Wie groß sind $K(v)$ und $f(v)$ für $v = 500$ m/s?

$K(v) = 3,998 \cdot 10^{-6}$; $K(v) \approx 4 \cdot 10^{-6}$; $f(v) = K(v) \cdot v^2 = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2 = 1$ kg/cm². Das bedeutet, daß bei $v = 500$ m/s auf den cm² des Geschößquerschnitts durchschnittlich ein Widerstand von 1 kg entfällt, oder, daß der Luftwiderstand geteilt durch den Geschößquerschnitt in diesem Falle gerade 1 at ergibt. (s. auch Bild 9, S. 27).

2. Wie groß ist für ein Geschöß vom Kaliber 10,5 cm und vom Formwert $i = 0,86$ (= Mittelwert für Artilleriegeschosse) der Luftwiderstand bei $\delta = 122$ kg/m³ und 10° C, wenn seine Geschwindigkeit 370 m/s beträgt?

Man entnimmt der Tabelle: $K(v) = 3,605 \cdot 10^{-6}$. Daraus folgt: $f(v) = 3,605 \cdot 10^{-6} \cdot 370^2 = 0,493$ kg/cm² und für den Luftwiderstand:

$$W = \frac{10,5^2}{4} \cdot \pi \cdot 0,86 \cdot 0,493 = \underline{\underline{36,7 \text{ kg}}}$$

(Man vergleiche diesen Wert mit dem auf Seite 31 aus Schußtafelwerten berechneten Betrag des Luftwiderstandes bei derselben Geschößgeschwindigkeit.)

3. Schließlich findet man die Verzögerung w , die das Geschöß (sein Gewicht sei 15,6 kg) durch den Luftwiderstand von 36,7 kg erfährt, nach der Gleichung: $K = M \cdot b$ bzw. in diesem Falle:

$$w = \frac{W}{M} = \frac{W \cdot g}{G}$$

$$w = \frac{36,7 \cdot 9,81}{15,6} = \underline{\underline{23,1 \text{ m/s}^2}}$$

e) Ein vom Luftgewicht unabhängiger Einfluß der Lufttemperatur auf die Größe des Luftwiderstandes.

Der Ansatz nach Gl. 18) berücksichtigt die Lufttemperatur in ihrem Einfluß auf die Größe des Luftwiderstandes nur insoweit, als sie das Luftgewicht mitbestimmt (s. auch Seite 78). In

Wirklichkeit hat die Temperatur aber noch einen weiteren, vom Luftgewicht völlig unabhängigen Einfluß auf den Luftwiderstand. Es wurde oben betont, daß die Schallgeschwindigkeit eine bezeichnende Schwelle für die Größe des Luftwiderstandes darstellt. Die Schallgeschwindigkeit ist aber ihrerseits von der Temperatur abhängig. (Bei den absoluten Temperaturen T_0 und T_1 verhalten sich die Schallgeschwindigkeiten wie $\sqrt{T_0}$ zu $\sqrt{T_1}$, für den praktisch vorkommenden Temperaturbereich gilt genügend genau: eine Temperaturabnahme um 1°C setzt die Schallgeschwindigkeit um $0,6\text{ m/s}$ herab.)

Dementsprechend verschiebt sich bei einem Absinken der Temperatur von $+10^\circ\text{C}$ (dem als Normaltemperatur = T_0 festgesetzten Wert) auf -30°C die $K(v)$ -Kurve in der im Bild 10 eingezeichneten Weise. Der Luftwiderstand kann also bei verschiedenen Temperaturen für ein und dasselbe Geschöß bei gleicher Geschwindigkeit und gleichem Luftgewicht völlig verschiedene Werte annehmen, wie die Ordinaten der beiden $K(v)$ -Kurven zeigen. Es kann z. B. eine Geschößgeschwindigkeit (etwa $v = 325\text{ m/s}$) bei Durchschnittstemperaturen kleiner sein als die Schallgeschwindigkeit, während sie bei sehr großer Kälte schon darüber liegt. Im zweiten Fall ist der Luftwiderstand erheblich größer.

Man entnimmt ohne weiteres aus Bild 10, daß dieser Temperatureinfluß dann besonders stark ist, wenn die Geschößgeschwindigkeit in der Nähe der Schallgeschwindigkeit liegt, während er in denjenigen Geschwindigkeitsbereichen, in denen die Kurve waagrecht verläuft, gleich Null ist. Eine Flugbahn, bei der die Geschwindigkeit des Geschosses während des ganzen Fluges stets wesentlich größer oder stets wesentlich kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, wird verhältnismäßig wenig beeinflusst. Anders liegen die Verhältnisse bei solchen Flugbahnen, deren v_0 nur um so viel größer ist als die Schallgeschwindigkeit, daß die Geschößgeschwindigkeit bei ihrem Absinken während des Fluges diesen Wert vorübergehend annimmt. In diesem Falle ergeben sich als Folge sehr niedriger Temperaturen nennenswerte Schußweitenverkürzungen bzw. bei sehr hohen Temperaturen entsprechende Schußweitenvergrößerungen. Bei sehr großen Mündungsgeschwindigkeiten ist, wie schon erwähnt, dieser Temperatureinfluß gering, er hat dann aber im allgemeinen das umgekehrte Vorzeichen, da — wie sich aus der verschobenen $K(v)$ -Kurve im Bild 10 entnehmen läßt — bei sinkender Temperatur im entsprechenden Bereich der Luftwiderstand abnimmt. Es kann sogar der Fall eintreten, daß der fragliche Temperatureinfluß bei ein- und derselben Ladung je nach der Erhöhung positives oder negatives Vorzeichen hat. In einem bestimmten, über der Schallgeschwindigkeit gelegenen v_0 -Bereich tritt nämlich folgendes auf: Bei kleinen Erhöhungen, also bei kleinen Flugzeiten, ist der gesamte Geschwindigkeitsabfall noch nicht so groß, daß die Nähe der Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Die Geschößgeschwindigkeit bleibt also über der Schallgeschwindigkeit; es tritt bei einer Temperatur unter $+10^\circ\text{C}$ eine kleine Schußweitenvergrößerung ein. Bei derselben v_0 , aber bei größeren Erhöhungen sinkt jedoch die Geschößgeschwindigkeit im Verlauf des Fluges unter die Schallgeschwindigkeit, was bei tiefer Temperatur die schon erwähnte, verhältnismäßig große Schußweitenverkürzung nach sich zieht.

Man nennt den beschriebenen Einfluß der Lufttemperatur, da die Schallgeschwindigkeit in einem Stoffe von dessen Elastizität abhängt, auch den Einfluß der Luftelastizität. Er wurde in seiner Bedeutung für die Ballistik erstmalig im ersten Weltkrieg in Frankreich erkannt („Darrieux-Effekt“). In früheren deutschen Schußtafeln ist er nicht berücksichtigt, jedoch machen es besonders tiefe Temperaturen notwendig, ihn zusätzlich auszuschalten. Natürlich kann man B.W.E.-Tafeln auch von vornherein so aufstellen, daß beide Temperatureinflüsse (der über das Luftgewicht und der über die Schallgeschwindigkeit sich auswirkende) zusammengefaßt sind, während der Luftdruck gesondert erfaßt wird.

Der gesamte Einfluß, den die Temperatur auf die Verzögerung des Geschosses ausübt, wird in dem folgenden Ansatz berücksichtigt:

(18d)

$$w = c \cdot v^2 \cdot K \left(v \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T}} \right)$$

worin c die auf Seite 27 angegebene Bedeutung hat.

d) Über den Formfaktor i

Bezüglich der Trennung von i und $f(v)$ bzw. $K(v)$ ist zu den Gl. 18) bis 18d) noch folgendes nachzutragen: Neuere Untersuchungen haben ergeben, daß, streng genommen, für jedes Geschöß eine eigene Luftwiderstandsfunktion gilt, und daß man die Kurven, die den Luftwiderstandsfunktionen der einzelnen Geschöße entsprechen, durch keine Änderung des Ordinatenmaßstabes ineinander überführen kann. Das letztere müßte aber der Fall sein, wenn sich, wie oben angenommen ist, eine von der Geschößform unabhängige Luftwiderstandsfunktion und ein fester, nicht von der Geschößgeschwindigkeit abhängiger Formfaktor voneinander abspalten ließen. Tatsächlich stellt eine allgemein gültige, also vom Geschöß unabhängige Luftwiderstandsfunktion nur eine Näherung dar (Bild 9 und Bild 10 und die Tabelle auf Seite 29 gelten genau für das sogenannte „Kruppsche Normalgeschöß“, Kaliber 10 cm), mit der zu arbeiten sich allerdings für die meisten ballistischen Aufgaben als zweckmäßig erwiesen hat, und auf der eine Reihe von ballistischen Tabellenwerken beruhen. Bei der Verwendung solcher Tabellen kann man den wirklich herrschenden Verhältnissen dadurch gerecht werden, daß man einen i -Wert, der sich (wenn auch nur schwach) mit der Geschwindigkeit ändert, als Korrektionswert einführt bzw. mit einem sich etwas ändernden c -Wert rechnet.

e) Ermittlung des Zahlenwertes für den Luftwiderstand aus Schußtafelwerten

* Über die Größe des Luftwiderstandes in einem praktisch gegebenen Falle gibt uns auch die nachfolgende kurze Überschlagsrechnung Aufschluß:

Nach dem Grundgesetz der Mechanik ist: — $M \frac{dv}{dt} = W$ (die wirkende Kraft W verkleinert im vorliegenden Falle die Geschößgeschwindigkeit, deshalb das Minuszeichen). $\frac{dv}{dt}$ ist in der Regel nicht bekannt, dagegen kennt man meist (entweder aus unmittelbarer Messung oder aus der Schußtafel, Spalte Endgeschwindigkeit) den Geschwindigkeitsabfall nach einer genügend kleinen Flugstrecke, also: $\frac{dv}{ds}$

Es ist (Kettenregel!):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v.$$

Also (das Minuszeichen bezieht sich lediglich auf die Richtung und ist für die Größe der Luftwiderstandskraft ohne Bedeutung):

(19)

$$W = M \cdot v \cdot \frac{dv}{ds}$$

Beispiel: Lehrschußtafel, 5. Ldg., $M = \frac{15,60 \text{ kg}}{9,81 \text{ m/s}^2}$, für ein ds von 200 m ist $dv = 13 \text{ m/s}$ (Endgeschwindigkeit nach 200 m ist 357 m/s), also $\frac{dv}{ds} = \frac{13}{200} = 0,065 \frac{\text{m/s}}{\text{s}}$. Als v ist der Mittelwert zwischen der

v_0 (= 370 m/s) und der Endgeschwindigkeit einzusetzen, also: $v = 364 \text{ m/s}$. Es ist also:

$$W [\text{in kg}] = 1,59 \cdot 364 \cdot 0,065 = 37,6.$$

Das Geschöß wird demnach im vorliegenden Falle durch eine Kraft von 37,6 kg (das ist das 2,4fache seines Gewichts!) gehemmt. (Man vergleiche diesen Wert mit dem, der aus der $f(c)$ -Kurve oder den Werten der Tabelle auf S. 29 und dem Geschößquerschnitt sich ergibt, s. Beispiel 3 auf S. 29. Dabei beachte man, daß der Wert von dx , mit dem hier gerechnet wurde, nur bis auf ganze m/s bekannt ist, daß also eine noch bessere Übereinstimmung kaum erwartet werden konnte.)

II. Geschößflug und Stabilisierung.

a) Allgemeines

Neuzeitliche Schußwaffen verfeuern ausschließlich Langgeschosse. Gegenüber dem Kugelgeschöß früherer Zeiten hat das Langgeschöß den Vorteil der viel günstigeren Querschnittsbelastung (s. Seite 26). Außerdem kann man dem Langgeschöß eine Form erteilen, die geeignet ist, den Luftwiderstand klein zu halten. Diese beiden Vorteile wirken sich jedoch nur aus, wenn das Geschöß im Fluge „stabilisiert“ ist, d. h., wenn es sich beim Fluge in der Richtung seiner Längsachse bewegt.

Für die Notwendigkeit eines solchen Fluges bestehen noch folgende weitere Gründe: Ein Geschöß, von dem man Durchschlagswirkung verlangt, kann diese Wirkung nur entfalten, wenn es mit der Spitze voraus aufschlägt. Außerdem ist ein Zünder, der auf Stoß oder Verzögerung aus einer einzigen Richtung anspricht, am betriebssichersten und am leichtesten zu bauen; diese bevorzugte Richtung kann natürlich nur die der Geschößachse sein.

Nun ist für einen stabförmigen Körper, dessen Schwerpunkt etwa in der Mitte liegt, also auch für ein normales Langgeschöß, der Flug in der Längsrichtung keineswegs selbstverständlich: ein solcher Körper wird sich im Gegenteil im Luftstrom alsbald quer stellen. (Das zeigt ein Versuch, bei dem die Verhältnisse ähnlich liegen: Man halte einen völlig ebenen, steifen Streifen Papier senkrecht und lasse ihn so zur Erde fallen. Er wird im Fallen nur über eine kurze Strecke senkrecht bleiben; jede kleinste Störung läßt ihn nach einer Seite ausschlagen und bewirkt, daß er, lebhaft hin- und herschwingend, aber im allgemeinen quer gestellt, weiterfällt.) Die Längslage im Luftstrom ist also nur eine labile Gleichgewichtslage, d. h. der Luftstrom hat das Bestreben, jeden noch so kleinen einmal bestehenden Anstellwinkel zwischen der Längsachse des Körpers und seiner Fortbewegungsrichtung zu vergrößern. Diesen Sachverhalt pflegt man auch in der Form auszusprechen:

Bei einem Geschöß, das ungefähr Zylinderform hat, liegt der Angriffspunkt P des Luftwiderstandes W (s. Bild 12), sobald die Bewegung nicht mehr genau in der Richtung der Längsachse erfolgt, vor dem Geschößschwerpunkt. (Dabei ist der Luftwiderstand, der auf die gesamte vorn liegende Fläche des Geschößes wirkt, durch eine Kraft W ersetzt — s. Bild 11 und 12 —, die an einem Punkt der Geschößlängsachse angreift.) Auch diese Aussageform bedeutet nichts anderes, als daß der Luftwiderstand zunächst bestrebt ist, das fliegende Geschöß querzustellen.

Es muß daher besonders dafür gesorgt werden, daß die Längsachse des Geschößes im Fluge die Richtung der Flugbahntangente beibehält, bzw. daß sie nach kleinen Störungen stets in diese Lage zurückkehrt. Das läßt sich auf zwei Arten erreichen:

1. Dadurch, daß man das Geschöß, bei möglichst weit nach vorn gerücktem Schwerpunkt, an seinem hinteren Ende mit besonderen Flächen versieht (Pfeil- oder Flügelstabilisierung).
2. Dadurch, daß man dem Geschöß eine Drehung um seine Längsachse, den Drall, erteilt (Drallstabilisierung).

Die Kraft, die das Geschöß auf die Flugbahntangente einrichtet, ist in beiden Fällen der Luftwiderstand. Die Art, in der sich diese Kraft auswirkt, ist aber, wie noch näher ausgeführt werden wird, bei den beiden Stabilisierungsarten grundsätzlich verschieden.

b) Die Pfeilstabilisierung.

Bei der Pfeil- (oder Flügel-)stabilisierung bringt man möglichst weit hinten am Geschöß (z. B. Pfeil, Fliegerbombe, Wurfgranate, Rakete in ihrer häufigsten Form) Flächen an, die den Angriffspunkt P des Luftwiderstandes hinter den Schwerpunkt verlegen (s. Bild 11).

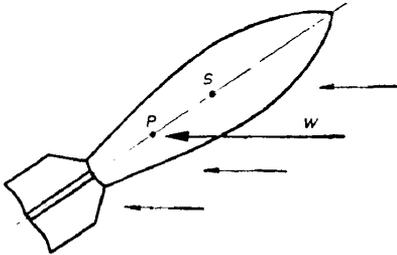


Bild 11: Beim flügelstabilisierten Geschöß liegt der Angriffspunkt (P) des Luftwiderstandes (W) hinter dem Schwerpunkt (S) des Geschößes.

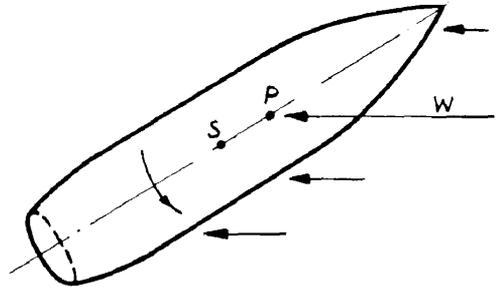


Bild 12: Beim drallstabilisierten Geschöß liegt der Angriffspunkt (P) des Luftwiderstandes (W) vor dem Schwerpunkt (S) des Geschößes.

Ein solches Geschöß ist ohne Drall im Fluge „folgsam“, d. h. der Luftstrom selbst richtet es nach kleinen Störungen stets wieder auf die Flugrichtung ein. Für die Pfeilstabilisierung ist also der hinter dem Schwerpunkt angreifende Luftwiderstand wesentlich.

Gegenüber der noch zu besprechenden Drallstabilisierung bietet die Flügelstabilisierung folgende Vorteile:

1. Die Geschöße können — gemessen am Kaliber — wesentlich länger sein als drallstabilisierte Geschöße, bei denen man in der Geschößlänge nur in Ausnahmefällen über 5 Kaliber hinausgehen kann. Man kann also flügelstabilisierten Geschößen eine besonders große Querschnittsbelastung geben.
2. Es besteht praktisch keine obere Grenze für die Erhöhung, wie sie bei der Drallstabilisierung vorliegt (s. Seite 37), d. h. Pfeilgeschöße sind auch dann noch „folgsam“, wenn die Flugbahn in der Nähe des Gipfels stark gekrümmt ist.
3. Flügelstabilisierte Geschöße können aus glatten Rohren verfeuert werden. Das bedeutet für die Fertigung eine wesentliche Erleichterung. Bei der Rakete liegen die Verhältnisse insofern ähnlich, als sich auch hier die Fertigung der pfeilstabilisierten Form wesentlich einfacher gestaltet als die der drallstabilisierten.

Den genannten Vorteilen stehen einige Nachteile gegenüber:

1. Die Streuungen flügelstabilisierter Geschöße sind, verglichen mit denen drallstabilisierter Geschöße — unter sonst gleichen oder ähnlichen Verhältnissen — im allgemeinen größer. Ganz besonders gilt das für die Streuung der flügelstabilisierten Rakete, deren Antriebsflugbahn gegen böigen Wind sehr empfindlich ist.
2. Zum Betätigen von irgendwelchen Teilen des Zünders, vor allem zu dessen Entsicherung, steht die Flichkraft nicht zur Verfügung.

c) Die Drallstabilisierung

Weniger einfach als die Flügelstabilisierung geht die Stabilisierung durch den Drall vor sich. Über ihren mechanischen Ablauf kann hier nur ein vereinfachter Überblick gegeben werden. Der Vorgang, der das Einrichten des drallstabilisierten Geschößes auf die Flugbahntangente bewirkt, und damit das Geschöß „folgsam“ macht, ist die sogenannte Präzession des Kreisels (auch konische Pendelung genannt).

Erklärung der Präzession:

Diese Erscheinung werde zunächst am Beispiel des Kinderkreisels, von dem sie allgemein geläufig ist, betrachtet (s. Bild 13). Solange die Achse des schnell drehenden Kreisels senkrecht

steht, erfolgt gar nichts. Bringt man aber die Kreiselachse etwas aus der Senkrechten, so versucht die Erdanziehung den Kreisel umzukippen, ihm also eine neue Drehung (G) um eine waagerechte Achse, die durch die Kreisel Spitze geht, aufzuzwingen. Der Kreisel führt jedoch diese Drehung nicht aus (d. h. er fällt nicht um), sondern er weicht aus, in einer Richtung (P), die senkrecht auf derjenigen steht, in der ihn die Erdanziehung umkippen will. In der neuen Lage wiederholt sich der Vorgang, und wir sehen, daß die Kreiselachse den Mantel eines Kegels beschreibt; die Achse dieses Kegels ist die Senkrechte durch die Kreisel Spitze. Der Kreisel umfährt übrigens diesen sogenannten „Präzessionskegel“ um so langsamer, d. h. er ist um so „stabiler“, je größer die Geschwindigkeit ist, mit der er sich um seine eigene Längsachse dreht.

Die Richtung, in der die Präzession erfolgt, bestimmt man leicht nach folgender Merkmahlregel: Der Kreisel hat eine Eigendrehung. Von außen soll ihm eine weitere Drehung aufgezwungen werden. Er weicht nun so aus, daß nach erfolgtem Ausweichen um einen rechten Winkel (d. h. nach Umfahren eines Viertels des Präzessionskegels) der Drehsinn der Eigendrehung gleich dem Drehsinn der Drehung ist, die dem Kreisel in der ursprünglichen Lage aufgezwungen werden sollte; oder, kürzer gesagt: Die Präzession sucht die Eigendrehung des Kreisels der aufgezwungenen Drehung gleichsinnig zu machen.

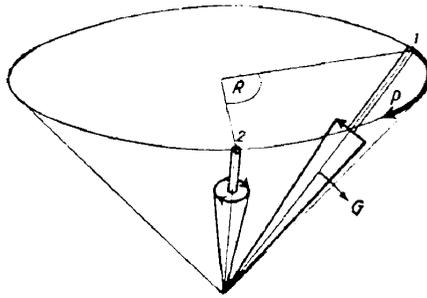


Bild 13: Die Präzession des Kreisels.

Als Beispiel dient wieder der Kinderkreisel (Bild 13). In der Anfangslage (1), in der die Drehenebene der Kreiseigendrehung durch das Auge des Beschauers geht, versucht die Erdanziehung, den Kreisel um seinen Fußpunkt zu kippen, und zwar für den Beschauer im Uhrzeigersinn (G). Der Kreisel weicht im rechten Winkel hierzu aus. Die Richtung dieses Ausweichens (P) bestimmt sich so, daß nachher (d. h. nach einem Viertel-Präzessionsumlauf, um den Winkel $R = 90^\circ$) die Kreiseigendrehung vom Beschauer aus ebenfalls im Uhrzeigersinn verläuft. Das ist dann der Fall, wenn der Kreisel aus der Bildebene heraus auf den Beschauer zugewandert ist, so daß die Blickrichtung ihn (in der Lage 2) schräg von oben trifft.

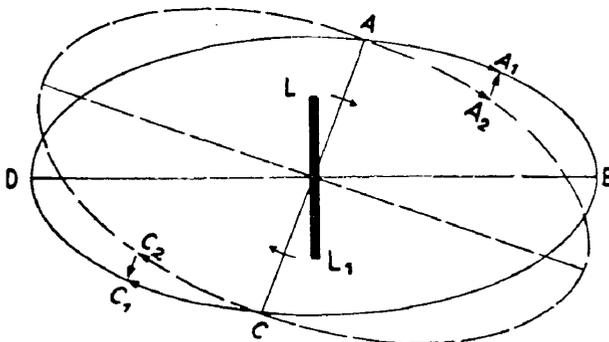


Bild 14: Zur Erklärung der Präzession. Text s. S. 35,

[Diese Merkregel gibt natürlich keine Erklärung der Präzession. Die Erscheinung wird aber als Folge der Trägheit der einzelnen Massenteilchen des Kreisels leicht durch folgenden Gedankenversuch (s. Bild 14) verständlich: Ein Kiesel — diesmal lediglich ein mit Masse belegter Kreis (Fahrradreifen oder dergl.), bei dem der Vorgang besonders übersichtlich ist —, dreht sich im Pfeilsinn schnell um die Achse $L-L_1$. Aus der ursprünglichen Drehebene, der Ebene $A-B-C-D$, versucht man, etwa durch Einwirken im Sinne der eingezeichneten Pfeile auf die Drehachse $L-L_1$, den Kiesel um $A-C$ zu kippen und in die gestrichelte gezeichnete Lage zu bringen. Nun werde das Verhalten derjenigen Teilchen, die sich zu Anfang des Kippens bei A und C befinden, betrachtet: Das Teilchen bei A hat eine nach A_1 gerichtete Geschwindigkeit, durch das Kippen soll seine Bewegung nach A_2 umgelenkt werden. Vermöge seiner Trägheit „will“ das Teilchen aber nach A_1 . Es setzt also dem Versuch, es nach A_2 zu bringen, Widerstand entgegen, indem es eine Gegenkraft ausübt, die von A_2 nach A_1 gerichtet ist, d. h. die Kreiselseite bei A hebt. Entsprechendes gilt für das Teilchen bei C . Es „will“ nach C_1 . Auf den Versuch, es nach C_2 umzulenken, reagiert es mit einer Gegenkraft C_2-C_1 , die die Kreiselseite bei C senkt.]

Besonders lehrreich ist der folgende einfache Versuch, nicht nur als Anwendung der Merkregel, sondern auch weil dabei die Präzession ebenso wie die des Geschosses durch den vor dem Schwerpunkt angreifenden Luftwiderstand eingeleitet wird. Man werfe eine flache Scheibe (Kartuschdeckel, Bierfilz oder dergl.) derart, daß man sie zwischen Daumen und Zeigefinger faßt und ihr beim Abwurf eine starke Drehung in waagerechter Ebene (bei rechtshändigem Abwurf von oben gesehen im Gegensinne des Uhrzeigers) erteilt. Man wird feststellen, daß sich die Scheibe nach kurzem Flug mit der linken Seite hebt und sich in die senkrechte Ebene dreht. Erklärung: Der alsbald beginnende Fall, der sich der Bewegung in der Abwurfrihtung überlagert, ist für die Richtung der ersten Störung der labilen Gleichgewichtslage maßgebend, der Luftwiderstand, der vor dem Mittelpunkt angreift, versucht die Scheibe in der Richtung von vorn über oben zu drehen. Die infolgedessen eintretende Präzession verläuft so, daß die Eigendrehung der Scheibe in demselben Drehsinn, also über vorn nach oben erfolgt. Das ist dann der Fall, wenn die linke Seite der Scheibe gestiegen, die rechte gesunken ist. Durch Umkehren des Drehsinns, den man der Scheibe beim Abwurf erteilt, erhält man natürlich ein Steigen der rechten und ein Sinken der linken Seite.

Anwendung auf den Geschößflug.

Die Anwendung der Merkregel auf das Geschöß ergibt folgendes: Vom Geschößboden nach der Spitze zu gesehen, verläuft die Geschößeigendrehung im Sinne des Uhrzeigers (Rechtsdrall, s. Bild 12). Auch für alle späteren Betrachtungen ist Rechtsdrall des Geschosses vorausgesetzt. Das Geschöß beginnt, alsbald, nachdem es die Mündung verlassen hat, zu fallen; hiermit ist auch schon die erste Störung des labilen Gleichgewichts (s. Seite 32) gegeben, der Luftwiderstand, der, wie schon gesagt, vor dem Schwerpunkt angreift (diese Tatsache ist für das Zustandekommen der gewünschten Präzession und damit für die Folgsamkeit des Geschosses wesentlich!), versucht den Kiesel, den das Geschöß darstellt, um seinen Schwerpunkt so zu drehen, daß sich die Geschößspitze hebt. Der Drehsinn dieser Einwirkung ist (in der Seitenansicht des Bildes 12) der Gegensinn des Uhrzeigers. Nun weicht die Geschößspitze aus, aus der Papierebene heraus auf den Beschauer zu (s. die obige Merkregel!); in dieser neuen Lage des Geschosses stimmt der Drehsinn der Geschößeigendrehung mit dem Drehsinn der ersten Einwirkung des Luftwiderstandes überein, beide verlaufen für den Beschauer des Bildes 12 im Gegensinn des Uhrzeigers. In der Flugrichtung gesehen, wandert also die Geschößspitze zunächst nach rechts und im weiteren Verlauf nach unten.

Wäre die Richtung des Luftwiderstandes stets dieselbe, so würde das Geschöß den vollen Präzessionskegel um ebendiese Richtung umfahren. Die Längsachse des Geschosses würde dann nach jedem Präzessionsumlauf wieder in eine Lage zurückkehren, die parallel zu der ursprünglich eingenommenen wäre, d. h. die Geschößspitze würde sich über unten und links wieder nach oben

bewegen; sie wäre im Verlauf mehrerer Präzessionsumläufe ebenso oft links wie rechts der Flugbahnenebene. Nun wandert aber in Wirklichkeit die Richtung, in der der Luftwiderstand das Geschöß trifft, infolge der Krümmung der Flugbahn ebenfalls nach unten, bezogen auf die Waagerechte durch das Geschöß. Nach einem halben Präzessionsumlauf, wenn also die Geschößspitze gerade über rechts nach unten gependelt ist, fällt die Richtung des Luftwiderstandes wieder ungefähr mit der Geschößachse zusammen (hierin liegt das Wesen der sogenannten „Folgsamkeit“ des drallstabilisierten Geschößes). Da nunmehr die Verhältnisse wieder ebenso liegen wie zu Beginn des betrachteten halben Präzessionsumlaufes, wandert die Geschößspitze nicht nach links, sondern, wenn im weiteren Verlauf der Luftwiderstand das fallende Geschöß wieder von unten trifft, erneut nach rechts. Der beschriebene Vorgang, der sich bei Feldgeschützen in einer Zeit von der Größenordnung einer Sekunde abspielt, wiederholt sich bis zum Aufschlag.

Bei zu starkem Drall erfolgen die Pendelungen zu langsam, die Geschößspitze bleibt zu hoch, das Geschöß ist nicht mehr „folgsam“, sondern „überstabilisiert“. Bei richtig bemessenem Drall dagegen sucht die Längsachse des Geschößes über rechts, nach unten, stets wieder die Flugbahntangente auf.

Der Winkel, um den das Geschöß bei der Präzession aus der Flugbahntangente ausgelenkt wird, ist nur klein, so daß es, praktisch betrachtet, über die ganze Flugbahn mit der Spitze voraus fliegt. Natürlich kommt es auch am Ziel so an.

Neben der Präzession führt das Geschöß noch andere, mehr oder weniger starke Pendelungen, die sogenannten Nutationen, aus, die aber im Gegensatz zur Präzession nicht erwünscht sind. Sie treten vor allem im Anfang der Flugbahn auf und werden dadurch verursacht, daß beim Austritt des Geschößes aus der Mündung auch Einwirkungen quer zur Geschößachse (Rohrschwingungen, Ungleichmäßigkeiten beim Austritt der Pulvergase) zustande kommen. Diese Nutationspendelungen klingen im allgemeinen rasch ab und stören den Geschößflug dann nicht mehr.

d) Rechtsabweichung. Grenze der Folgsamkeit des drallstabilisierten Geschößes. Der Magnuseffekt.

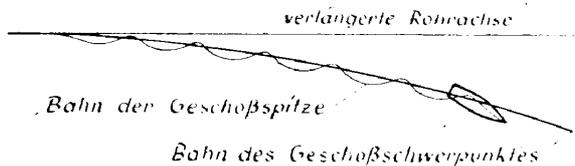


Bild 15: Erklärung der Rechtsabweichung: Die Flugbahn ist von oben gesehen. Bei den Pendelungen befindet sich die Geschößspitze vorwiegend rechts der Flugbahn, so daß sich das Geschöß nach rechts aus der ursprünglichen Flugbahnenebene herauschiebt.

Bei der unter c) betrachteten Präzessionsbewegung des Geschößes liegt die Geschößspitze vorwiegend rechts der Flugbahnenebene (s. Bild 15). Das Geschöß wird also auf dem größten Teil seines Fluges vom Luftwiderstand in seiner linken Flanke getroffen; es schiebt sich dadurch aus der ursprünglichen Flugbahnenebene heraus und weicht nach rechts ab. (Bei Linksdrall, wie ihn einige ausländische Geschütze haben, erfolgt natürlich die Präzessionsbewegung und ebenso die Seitenabweichung nach links.) Der Betrag dieser Rechtsabweichung, die durch die am Geschütz einzustellende, in der Schußtafel angegebene Seitenverschiebung ausgeglichen wird, wächst bei ein und demselben Geschütz mit der Zahl der im ganzen ausgeführten Geschößpendelungen, d. h. mit der Flugzeit, also auch mit der Erhöhung (siehe Faustformel auf Seite 76). Das gilt natürlich nur, so weit der Drall überhaupt imstande ist, das Geschöß zu stabilisieren. Von einer gewissen Erhöhung ab ist die Flugbahn in der Gegend des Gipfels so stark gekrümmt, daß der Luftwiderstand, der gerade hier wegen der kleinen Geschößgeschwindigkeit besonders klein ist, den Prä-

zessionsvorgang nicht mehr voll bewirken kann. Das Wiederanschmiegen der Geschosßachse an die Flugbahntangente kommt dann nicht mehr zustande, das Geschosß fällt im absteigenden Ast quer oder gar mit dem Boden voraus. Die Streuung (besonders die Breitenstreuung) nimmt stark zu und es tritt schließlich statt der Rechtsabweichung Linksabweichung ein.

Die obere Grenze der Erhöhung, bis zu der der Geschosßflug praktisch einwandfrei ist, liegt im allgemeinen um 1160— bis 1250— (65° bis 70°). Der Grund für die darüber hinaus auftretende Linksabweichung kann in folgendem liegen: bei einem Geschosß, das ungefähr vom Gipfel der Flugbahn ab nicht mehr folgsam ist, zeigt die Geschosßspitze im allgemeinen nach rechts, da ja im aufsteigenden Ast noch regelrechte Präzessionsbewegungen nach rechts erfolgt sind. Der Boden, mit dem voraus das Geschosß nun fällt, zeigt daher nach links, so daß sich das Geschosß nunmehr nach links aus der Flugbahnebene herauschiebt.

Die Linksabweichung hat aber noch eine weitere Ursache, nämlich den sogenannten Magnus-effekt (beschrieben von Magnus, deutschem Physiker, † 1870). Dieser Effekt kommt so zustande (s. Bild 16): Dem Geschosß haftet stets etwas Luft an, die bei der Rechtsdrehung auf der rechten Geschosßseite nach unten, auf der linken nach oben mitgerissen wird. Die auf der rechten Geschosßseite nach unten gerissene Luft prallt dort mit dem Luftstrom, der das fallende Geschosß von vorn-unten trifft, zusammen, so daß auf der rechten Geschosßseite ein Überdruck (+ + +) entsteht. Auf der linken Geschosßseite werden umgekehrt Luftteilchen schneller nach oben gerissen, als der Luftstrom von unten sie ersetzen kann, dort entsteht also ein Unterdruck (— — —). Die Folge ist, daß das Geschosß etwas nach links gedrückt wird.

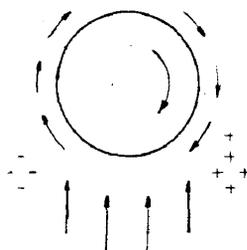


Bild 16: Zur Erklärung des Magnus-effekts: Das Geschosß ist von hinten gesehen. Durch das Mitrotieren von Luft, die der Geschosßoberfläche anhaftet, entsteht bei (+ + +) ein Überdruck, bei (- - -) ein Unterdruck.

[Im Versuch — etwa im Windkanal — ist nur diese linksablenkende Wirkung der Reibung zwischen der Luft und dem rechtsdrehenden, auf seiner Unterseite vom Luftstrom getroffenen Geschosß nachweisbar. Die Erklärung der normalen Rechtsabweichung durch die Polsterwirkung der auf der Unterseite des fallenden Geschosses verdichteten Luft, auf der das Geschosß nach rechts rollen sollte, ist also nicht stichhaltig.]

Der Magnus-effekt, der auch bei Flugbahnen mit kleiner Erhöhung auftritt, würde für sich allein ein mit Rechtsdrall abgefeuertes Geschosß stets nach links abweichen lassen. Er wird aber im allgemeinen, solange das Geschosß folgsam ist, durch den größeren, rechtsablenkenden Kreisel-effekt überdeckt. Das ist bei den erwähnten größten Erhöhungen nicht mehr der Fall, der Magnus-effekt, der gerade beim querfliegenden Geschosß besonders groß ist, überwiegt dann und läßt dann das Geschosß nach links abweichen.

III. Der Geschosßknall.

Bei der Besprechung des Luftwiderstandes (s. Seite 28) und seiner Abhängigkeit von der Geschosßgeschwindigkeit wurde darauf hingewiesen, daß ein Geschosß, sowie seine Geschwindigkeit die des Schalles überschreitet, einen großen Teil seiner Bewegungsenergie zur Bildung der

sogenannten „Kopfwelle“ aufwenden muß. So ist es zu erklären, daß die Funktion $[f(v)]$, die die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschößgeschwindigkeit wiedergibt, an dieser Stelle ihren steilsten Anstieg hat, d. h., daß der Luftwiderstand hier bei steigender Geschößgeschwindigkeit ganz besonders schnell anwächst.

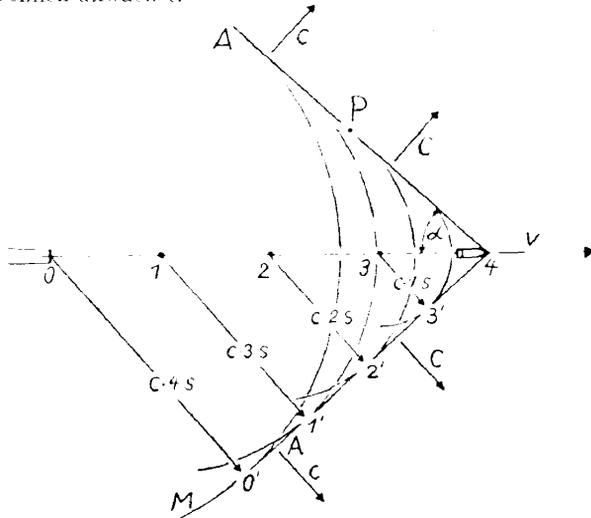


Bild 17: Das Entstehen der Kopfwelle beim Geschöß, das mit Überschallgeschwindigkeit fliegt.

Das Zustandekommen der Kopfwelle erklärt sich folgendermaßen (s. Bild 17): Die Geschößspitze hatte nach 0, 1, 2, 3 Sek. (vom Geschößaustritt aus der Mündung, dem Beginn unserer Betrachtung an) die Punkte 0, 1, 2, 3 erreicht, augenblicklich, am Ende der 4. Sekunde, ist es bei Punkt 4. Ebenso wie sie jetzt, im Punkt 4, die Luft auseinanderwirft und anstößt, hat sie dies in den Punkten 0, 1, 2, 3 zu den entsprechenden Zeiten getan. Jede dieser Störungen hat sich mit Schallgeschwindigkeit (c) fortgepflanzt, und zwar als Kugelwelle nach allen Seiten. Die betreffenden Schallwellen sind also augenblicklich an den mit $0'$, $1'$, $2'$, $3'$ bezeichneten Stellen angelangt. Natürlich ist die Unterteilung in ganze Sekunden durchaus willkürlich, es sind sehr viele Kugeln entsprechend ineinanderliegend zu denken. Alle diese Kugeln haben aber eine gemeinsame „Einhüllende“, den Kegel: A—Geschößspitze—A.

Wir haben uns jeden Knall als eine fortschreitende Luftverdichtung, der alsbald eine Verdünnung folgt, zu denken. Nur da, wo die Kugelwellen den Kegelmantel A—Geschößspitze—A berühren, ist diese Luftverdichtung nicht durch die Luftverdünnung einer Nachbarschallwelle gestört bzw. aufgehoben (Interferenz), so daß sich tatsächlich nur eine Luftverdichtung in Gestalt eines Kegels ausbildet, die sich senkrecht zur Kegeloberfläche (s. Pfeile in Bild 17) mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet. Das Ohr hört diese Kopfwelle als besonders scharfen und hellen Knall, den sogenannten „Geschößknall“.

Es leuchtet nach dem Gesagten ein, daß für den Punkt $2'$ der Knall vom Punkt 2 der Flugbahn herkommt. Ein Beobachter bei $2'$ empfindet also den Punkt 2 der Flugbahn als Knallquelle. Das kann u. U. im Kriege bei Versuchen, die feindliche Artillerie mangels anderer Anhalte zunächst nach dem Gehör festzulegen, zu groben Täuschungen führen.

Ein einfaches auf die Ebene übertragenes Bild der betrachteten Erscheinung liefert übrigens jedes schnellfahrende Schiff mit seiner Bugwelle, die ähnlich zustande kommt wie der Geschößknall.

Der Kegel des Geschößknalls hat den halben Öffnungswinkel α . Aus der Erklärung des Vorganges folgt unmittelbar: $\sin \alpha = \frac{c}{v}$. Es läßt sich also aus einer photographischen Aufnahme des

fliegenden Geschosses und seiner Kopfwelle (solche Aufnahmen werden nach dem „Töplerschen Schlierenverfahren“ gemacht) die Geschößgeschwindigkeit bestimmen. In der Praxis wird dieses Verfahren allerdings kaum angewandt.

Hinter der Geraden 0—0' kommt kein Geschößknall zustande, es ist dort lediglich der Mündungsknall (M) zu hören.

Liegt die Geschößgeschwindigkeit unter der Schallgeschwindigkeit, so bildet sich keine Kopfwelle aus. Das Geschöß bleibt immer mehr hinter dem Mündungsknall zurück. Die vom Geschöß in jedem Flugbahnpunkt hervorgerufenen Luftstörungen sind erheblich schwächer als im Überschallgebiet. Sie laufen mit Schallgeschwindigkeit vor dem Geschöß her und sind nach dem Mündungsknall als Rauschen zu hören.

IV. Geschößform.

Für Geschwindigkeiten unter der Schallgeschwindigkeit ist die Form, bei der die hemmende Wirkung der Wirbel und die des Sogs (s. Seite 28) besonders klein sind, und bei der deshalb die Luft den kleinsten Widerstand bietet, die eines vorn gerundeten, hinten spitz zulaufenden Körpers, dessen größter Querschnitt vor der Mitte liegt. Dieser bekannten Form nähern sich z. B. soweit es der Verwendungszweck zuläßt, Flugzeuge und Rennwagen.

Bei Überschallgeschwindigkeiten liegen die Verhältnisse anders. Das möglichst wirbellose Ab- und Wiederzusammenströmen der Luft hinter dem Geschöß hat zwar auch hier seine Bedeutung. Deshalb haben neuzeitliche Geschosse im allgemeinen hinter dem Führungsband einen nach hinten verjüngten Zapfen.

Die Gestaltung des hinteren Geschößendes ist aber im Überschallgebiet nicht mehr in demselben Maße entscheidend. Die hemmende Wirkung des Sogs am Geschößboden wächst mit größer werdender Geschößgeschwindigkeit nicht unbeschränkt mit, sondern bleibt unter einer gewissen Grenze; schließlich kann ja weniger als ein luftleerer Raum hinter dem Geschöß nicht entstehen. Dagegen steigt derjenige Anteil des Luftwiderstandes, der auf den vorderen Geschößteil und seine Form zurückzuführen ist, mit wachsender Geschwindigkeit unbegrenzt an. Je größer also Geschößgeschwindigkeit wird, desto wichtiger ist für das Kleinhalten des Gesamtluftwiderstandes die Form des vorderen Teiles des Geschosses. Besonders günstig ist eine ausgesprochen kegelförmige, langgezogene Spitze. Allerdings sind sowohl der Länge der Geschößspitze wie der des verjüngten Zapfens am Geschößende gewisse Grenzen gesetzt. Es darf nämlich wegen der sicheren Führung („Zentrierung“) des Geschosses im Rohr die sogenannte geführte Länge eines normalen Geschosses, d. h. die Länge zwischen Zentrierwulst und Führungsband, nicht unter einen gewissen Bruchteil der Gesamtgeschößlänge sinken. Andererseits darf die Länge des ganzen Geschosses — so günstig auch bezüglich der Querschnittsbelastung ein möglichst langes Geschöß wäre — etwa 5 Kaliber nur in Ausnahmefällen überschreiten, da sich erfahrungsgemäß längere Geschosse von der üblichen Form durch den Drall kaum oder gar nicht stabilisieren lassen.

Wichtig ist außerdem, daß keinerlei Unterbrechungen der glatten Außenfläche, ganz besonders vor der Stelle des größten Querschnitts, vorhanden sind. An jeder solchen Unstetigkeit bildet sich eine neue energieverzehrende Welle (s. Geschößknall) aus.

Bei der Form des Geschosses ist aber nicht nur das Kleinhalten des Luftwiderstandes, sondern (neben der Führung im Rohr, der Wirkung u. a.) auch die Drallstabilisierung zu berücksichtigen. Außenform und Massenverteilung müssen gewährleisten, daß der Angriffspunkt des Luftwiderstandes weit genug vor dem Schwerpunkt liegt (s. Abschnitt IIc). Das gilt besonders für Geschosse weitreichender Geschütze. Solche Geschosse erreichen Höhen, in denen der Luftwiderstand, der geringen Luftdichte wegen, verhältnismäßig klein ist. Andererseits ist gerade dort die Flugbahn besonders stark gekrümmt und deshalb ein richtiger Ablauf der Präzessionsbewegung besonders notwendig. Um nun das Drehmoment, das der Luftwiderstand auf das Geschöß ausübt, und das die Pendelung einleitet, zu vergrößern, läßt man den Luftwiderstand an einem möglichst langen

Hebelarm wirken. Man legt also den Schwerpunkt so weit wie möglich zurück, den Angriffspunkt des Luftwiderstandes nach vorn. Beides zugleich wird erreicht, indem man das Geschöß vorn mit einer hohlen Haube versieht, der man natürlich eine für das Überwinden des Luftwiderstandes günstige Außenform gibt. Man erhält so auch bei großen Flughöhen einen einwandfreien, folg-samen Geschößflug.

V. Eigenschaften der Flugbahn im luftgefüllten Raum.

Die Flugbahn, die tatsächlich im luftgefüllten Raum zustande kommt (Bild 18), genauer die Bahn des Schwerpunktes des Geschößes, ist eine Kurve, die nicht mehr in einem geschlossenen Ausdruck (einer Gleichung) dargestellt werden kann. Für alle Flugbahnen, unabhängig vom Kaliber, der v_0 und der Abgangsrichtung gilt:

1. Der spitze Neigungswinkel der Bahntangente gegen die Waagerechte ist in gleichen Höhenlagen stets im absteigenden Ast größer als im aufsteigenden, insbesondere ist der Fallwinkel größer als der Abgangswinkel ($\omega > \varphi$).

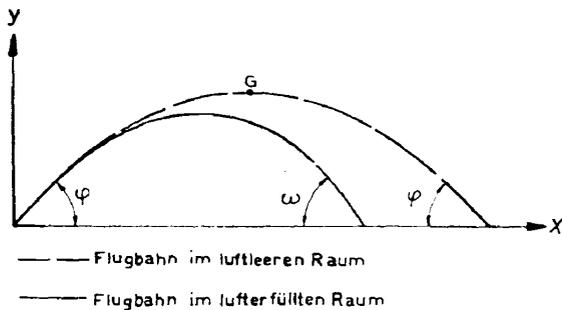


Bild 18: Vergleich zwischen der Wurfparabel des luftleeren Raums und der Flugbahn im luft-gefüllten Raum.

2. Die Geschwindigkeit des Geschößes ist im absteigenden Ast stets kleiner als in den Punkten gleicher Höhenlage des aufsteigenden Astes, insbesondere ist die Endgeschwindigkeit kleiner als die v_0 . Das ergibt sich leicht aus dem Energiesatz: im luftleeren Raum bleibt die Gesamtenergie des Geschößes erhalten, d. h. in allen Flugbahnpunkten ist die Summe aus der Energie der Lage und der Energie der Bewegung (Wucht) dieselbe, nämlich gleich der Mündungswucht. Im luftgefüllten Raum geht ein Teil der Energie, die dem Geschöß innewohnt, zur Überwindung des Luftwiderstandes verloren, bis das Geschöß den Punkt gleicher Höhenlage im absteigenden Ast erreicht. Da in diesen beiden Punkten gleicher Höhenlage aber die Energie der Lage dieselbe ist, muß der Verlust auf Kosten der Energie der Bewegung, d. h. der Geschwindigkeit gehen.
3. Der Gipfel liegt näher dem Fallpunkt als der Mündung.
4. Die Flugzeit im absteigenden Ast ist größer als im aufsteigenden.
5. Schußweite, Flugzeit, Gipfelhöhe, Entfernung des Gipfelpunktes sind kleiner als die entsprechenden Größen im luftleeren Raum.
6. Die Geschößgeschwindigkeit hat nicht auf dem Gipfel, sondern dahinter, auf einem Punkt des absteigenden Astes ihren kleinsten Wert. Bei flachen Flugbahnen kann dieser Punkt unter der Abgangsebene liegen. Ebenfalls auf dem absteigenden Ast, und zwar zwischen dem Gipfel und dem Punkt kleinster Geschwindigkeit, liegt der Punkt, an dem die Flugbahn am stärksten gekrümmt ist (Scheitel).

Beispiel: Bei der Musterflugbahn Nr. XIV (s. Seite 48) liegt der Gipfel bei:

$$x_g = 10\,840 \text{ m}, y_g = 6150 \text{ m},$$

der Punkt größter Bahnkrümmung bei $x \approx 12\,000$ m, $y \approx 6000$ m, der Punkt kleinster Geschwindigkeit bei $x = 12\,570$ m, $y = 5880$ m.

7. Der waagerechte Anteil der Geschwindigkeit (v_x) wird während des ganzen Fluges ständig kleiner.
8. Die Flugbahn hat eine in gewisser endlicher Entfernung verlaufende senkrechte Asymptote, der sich die Flugbahn in ihrem Verlauf unter der Abgangsebene unbegrenzt nähert. Bei der Musterflugbahn Nr. XIV würde z. B. diese senkrechte Asymptote etwa bei $x = 29\,300$ m liegen, also etwa 10 230 m weiter als der Fallpunkt.

Am parabelähnlichsten sind Flugbahnen von Geschossen mit großer Querschnittsbelastung und kleiner v_0 . Am stärksten durch den Luftwiderstand verformt, also am parabelunähnlichsten, sind die Flugbahnen von Geschossen kleiner Querschnittsbelastung und großer v_0 . (Beispiel: Gewehrgechoß).

Die Erhöhung mit der die Höchstschußweite erreicht wird, ist im allgemeinen nicht mehr 800—, meist liegt sie unter diesem Wert. (Beispiel: Musterflugbahn Nr. IX, S. 48). U. U., wenn das Geschoß in sehr große Höhen (Stratosphäre) gelangt, kann diese Erhöhung aber auch mehr als 800— (bis 900—) betragen. Das ist der Fall, wenn die Höchstschußweite etwa 30 km übersteigt.

VI. Die Rakete.

a) Der Raketenantrieb

In Schußwaffen mit normaler Ladungsanordnung wird das Geschoß dadurch auf seine größte Geschwindigkeit beschleunigt, daß hochgepannte Pulvergase sich in einem Raume ausdehnen, der durch das — als Kolben wirkende — Geschoß abgeschlossen ist; hierbei wird von den Gasen Arbeit geleistet.

Völlig anders ist der Antriebsvorgang bei der Rakete; sie erfährt ihre Beschleunigung bis zur Höchstgeschwindigkeit durch den Rückstoß, der entsteht, wenn Teilchen einer gewissen Masse (Verbrennungsgase) aus einer oder mehreren Düsen nach rückwärts, entgegen der gewünschten Flugrichtung des Geschosses, ausgestoßen werden. Der Beschleunigungsvorgang spielt sich bei der Rakete nicht ab, während sich das Geschoß innerhalb eines Rohres bewegt (wie dies sowohl bei normalen Schußwaffen als auch bei rückstoßfreien oder Düsenwaffen der Fall ist), sondern in seinem wesentlichsten Teil außerhalb der Abschußvorrichtung, auf dem ersten Teil der Flugbahn, der sogenannten Antriebsflugbahn. Die größte Geschwindigkeit wird also erst nach einer gewissen Flugstrecke im Brennschußpunkt (Punkt B, Bild 19a und 19b) erreicht, nicht schon beim Austritt aus der Waffe.

Die Rakete bietet gegenüber dem gewöhnlichen Geschoß folgende Vorteile:

1. Es treten keine Rückstoßkräfte auf, die etwa durch die Abschußvorrichtung aufzunehmen wären. Diese Vorrichtung kann also leicht gehalten werden (Beweglichkeit!). Man kann auch eine größere Anzahl von Raketen gleichzeitig oder nahezu gleichzeitig aus einer Gesamtabschußvorrichtung verschießen.
2. Die Beschleunigungswerte der Raketen sind viel kleiner als diejenigen normaler Geschosse; sie liegen im allgemeinen selbst bei sogenannten Kurzzeitraketen (s. Seite 42) unter dem 100fachen der Fallbeschleunigung, während schon bei gewöhnlichen Feldgeschützen die Beschleunigungen das 4000fache von g überschreiten. Raketengeschosse können deshalb viel dünnwandiger gehalten werden als normale Artilleriegeschosse, sie bringen also prozentual wesentlich mehr Sprengstoff ans Ziel als diese.

Den genannten Vorteilen stehen an Nachteilen gegenüber:

1. Die Streuungen von Raketengeschossen sind im allgemeinen wesentlich größer als die normaler, drallstabilisierter Geschosse, auch noch größer als die flügelstabilisierter Geschosse. Insbesondere ist die Antriebsflugbahn der flügelstabilisierten Rakete gegen böigen Wind sehr empfindlich.

2. Unter vergleichbaren Verhältnissen sind Raketenbahnen meist weniger gestreckt als die Flugbahnen normaler Geschosse, die bestrichene Entfernung ist also kleiner (Panzerbekämpfung!)
3. Einer Gefährdung der Bedienung durch die nach rückwärts ausströmenden heißen Gase muß durch Sicherheitsmaßnahmen vorgebeugt werden. Diese Gefährdung ist um so größer, je kurzzeitiger die Rakete brennt, einigermaßen kurze Brennzeiten sind aber aus anderen Gründen (s. Seite 44) sehr erwünscht.
4. Der Raketenantrieb hat einen schlechten Wirkungsgrad (s. Zahlenbeispiel Seite 46), d. h. es wird nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der im Treibstoff enthaltenen Energie in Bewegungsenergie (Wucht) des Geschosses verwandelt. Der weitaus größte Teil der im Ganzen aufgewandten Energie geht mit den abströmenden Gasen als deren kinetische Energie und als Wärme verloren. Die Rakete nutzt also das Pulver viel schlechter aus als das Geschütz, sie braucht deshalb, um gleiche Leistungen zu erreichen, wesentlich mehr Treibstoff als dieses.

b) Arten der Rakete, Unterteilung nach verschiedenen Gesichtspunkten.

Man unterscheidet bei den Raketen, die als Waffen verwendet werden, die beiden Haupttypen:

1. Feststoff-(Pulver-)Raketen, die den Gasstrahl durch Abbrennen eines Pulvertreibsatzes erzeugen.
Dabei beträgt die Ausströmgeschwindigkeit der Gase 1700 m/s bis 2000 m/s, der Druck in der „Brennkammer“ (dem Raum, in dem die Verbrennung vor sich geht) 50 at bis (äußerstenfalls) 200 at.
2. Flüssigkeitsraketen, bei denen flüssiger Treibstoff durch gesondert mitgeführten Sauerstoff verbrannt wird. Hierbei können Ausströmungsgeschwindigkeiten von 2800 m/s erreicht werden, die Brennkammerdrucke betragen 20–100 at.

Pulverraketen haben zwar einen einfachen Aufbau, können lange gelagert und ohne große Vorbereitungen verschossen werden, haben aber u. a. folgende Nachteile:

1. Der Treibstoffbehälter ist gleichzeitig Brennkammer und muß daher ganz für den vollen Brennkammerdruck bemessen werden.
2. Eine zeitliche Steuerung des Abbrandes ist nur sehr unvollkommen möglich, während man bei der Flüssigkeitsrakete die Beschleunigung recht genau abstimmen kann.
3. Der spezifische Energieinhalt von flüssigem Brennstoff plus Sauerstoff ist wesentlich höher als der von Pulver, deshalb brauchen Pulverraketen -- bei gleichen Leistungen -- ein höheres Treibstoffgewicht.

Aus diesen (und noch einigen anderen) Gründen verwendet man den Pulverantrieb für kleinere Raketen (Kaliber bis etwa 30 cm) und kurze Brennzeiten (0,1 s bis etwa 3 s), den Antrieb mittels flüssiger Treibstoffe für Großraketen und Raketen mit langen Brennzeiten.

Der Flug aller Raketen kann gesteuert oder ungesteuert erfolgen, im letzteren Falle wird die Flugbahn durch entsprechende Einstellung von Steuerflächen oder -- wirksamer -- durch seitlich angreifende Rückstoßkräfte (hervorgebracht z. B. durch Herausschwenken der Ausströmdüse aus der Richtung der Geschößlängsachse oder durch seitlich angebrachte Teiltreibladungen) beeinflusst. Die gesteuerte Rakete (Lenkgeschöß) kann durch Funk -- bei großen Entfernungen -- oder durch abgespulten Draht -- bei Nahzielen, z. B. Panzern -- ins Ziel gelenkt werden; schließlich kann eine Steuerung auch vom Geschöß selbst aus erfolgen, sei es als von vornherein eingestellte, sogenannte Programmsteuerung, sei es durch eine Zielsuchvorrichtung (Photozellen, Empfangseinrichtung für Wärmestrahlung, Radareinrichtung o. a.) im Raketenkopf.

Steuereinrichtungen aller Art komplizieren natürlich den Aufbau der Rakete erheblich, andererseits wird durch die Steuerung das Anwendungsgebiet der Rakete sehr erweitert (schnell

bewegte Ziele, insbesondere Flugzeuge!). Wichtig ist es auch, daß man eine Rakete mit gesteuerter Antriebsflugbahn aus senkrechter Anfangslage heraus starten lassen kann (wie z. B. die V 2 des zweiten Weltkrieges); das hat wiederum zur Folge, daß man mit recht kleiner Beschleunigung -- und damit auch schwacher Beanspruchung des Geschosses durch Trägheitskräfte -- auskommt.

c) Besonderheiten der Flugbahn der Rakete.

Auch die Flugbahn der ungesteuerten Rakete weicht wegen des unter a) erwähnten, für die Rakete kennzeichnenden Geschwindigkeitsverlaufs, in ihrem ersten Teil (der Antriebsflugbahn) von der Flugbahn gewöhnlicher Geschosse etwas ab.

Sobald die Rakete sich von der Abschußvorrichtung gelöst hat, führt sie, wie jeder der Erdanziehung überlassene Körper, die Bewegung des freien Falles aus; die Gesamtbewegung kommt dadurch zustande, daß die Vorwärtsbewegung, die hier die Folge des vom Rückstoß der Gasteilchen herrührenden Schubs ist, sich der Fallbewegung überlagert. Schließlich wirkt noch der Luftwiderstand, ebenso wie beim Normalgeschuß verzögernd auf den Flug der Rakete ein.

Im Anfangsteil der Antriebsflugbahn unterscheiden sich verschiedene Raketentypen etwas voneinander.

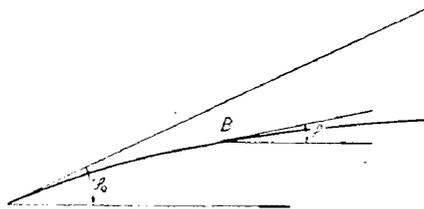


Bild 19a: Antriebsflugbahn einer Rakete, die die Abschußvorrichtung mit großer Geschwindigkeit verläßt und infolgedessen von Anfang an stabilisiert fliegt.

Bild 19a zeigt die Antriebsflugbahn einer Rakete, die die Abschußvorrichtung schon mit einer so großen Geschwindigkeit verläßt, daß sie von Anfang an vollständig stabilisiert fliegt.

Das wird praktisch bei Raketen mit kurzer Brennzeit erreicht, in diesem Fall wirkt der Schub sofort genau in der Richtung der augenblicklichen Bahntangente. Da die Geschwindigkeit bis zum Brennschlusspunkt ständig wächst, wird die Antriebsflugbahn einer solchen Rakete vom Beginn an immer gestreckter, sie hat ihre größte Krümmung zu Anfang, ihre kleinste im Brennschlusspunkt.

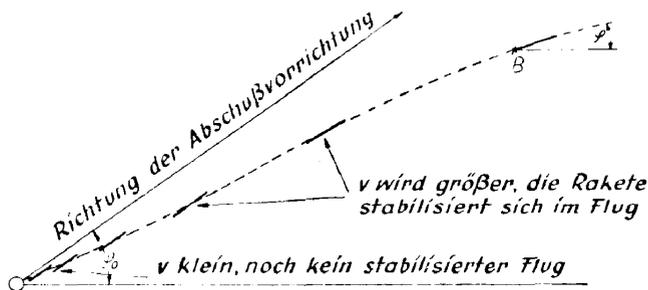


Bild 19b: Antriebsflugbahn einer Rakete, deren Geschwindigkeit beim Verlassen der Abschußvorrichtung noch gering ist. Stabilisierung tritt erst nach einer gewissen Flugstrecke ein. Eingezeichnet ist der Weg des Schwerpunktes und die Längsachse des Geschosses in gleichen Zeitabständen.

Bild 19b zeigt die Antriebsflugbahn einer Rakete, die schwach beschleunigt ist (verhältnismäßig lange Brennzeit), oder die von einer sehr kurzen Abschußvorrichtung aus verschossen wird. Eine solche Rakete kann sich zu Beginn des Fluges wegen der kleinen Geschwindigkeit

noch nicht mit ihrer Längsachse auf die Bahntangente einrichten, sie sackt vielmehr unmittelbar nach Verlassen der Abschubvorrichtung etwas nach unten durch, wobei sich die Geschoßlängsachse annähernd parallel zu sich selbst verschiebt. Erst nachdem eine etwas größere Geschwindigkeit erreicht ist, stabilisiert sich das Geschoß; die Flugbahn nimmt dann einen Verlauf an, der dem des erstgenannten Raketentyps ähnlich wird.

(Selbstverständlich können zwischen den beiden geschilderten extremen Arten des Verhaltens — sofortige völlige Stabilisierung und anfänglich gar keine Stabilisierung — alle Zwischenformen vorkommen.)

Im Brennschlußpunkt fügt sich stets der Antriebsflugbahn eine ballistische Kurve derselben Art an, wie sie das normale Artilleriegeschosß zurücklegt, die sog. Freiflugbahn.

Die wirksame Erhöhung für die Freiflugbahn (φ) ist gegeben durch die Bahnneigung im Brennschlußpunkt. Bis zu diesem Punkt hat sich aber, wegen der Krümmung der Antriebsflugbahn, der Anstieg der Flugbahntangente schon verkleinert. φ ist also stets kleiner als die am Gerät eingesetzte Erhöhung φ_0 .

Damit nun überhaupt eine Freiflugbahn, die zu einer nennenswerten Schußweite führt, zustandekommt, muß φ größer als Null sein (wäre φ kleiner — negativ —, so würde das Geschoß kurz nach dem Brennschluß aufschlagen), und φ_0 muß deshalb einen gewissen positiven Mindestwert haben.

Außerdem wird bei schwach beschleunigten Raketen dadurch, daß man sehr kleine Werte von φ_0 vermeidet, verhindert, daß das Geschoß bei seinem Durchsacken im ersten Teil der Antriebsflugbahn auf dem Boden oder auf der vorliegenden Deckung aufschlägt.

Bei ungesteuerten Pulverraketen, die wegen ihres robusten Aufbaus auch größere Beschleunigungen aufnehmen können, ist man bestrebt, die Brennzeit des Raketentriebsatzes so kurz zu halten, wie das ohne Gefährdung von Bedienung und Material möglich ist. (Man erreicht damit einen frühzeitig stabilisierten Flug, vermeidet allzu große Streuungen und setzt die Länge der vom Feinde aus erkennbaren Rauchspur herab.) Je kürzer aber die Brennzeit ist, desto mehr nähert sich die Geschoßflugbahn der Rakete der eines Normalgeschosses. (Über die Anwendung von Näherungsformeln auf Raketenflugbahnen s. S. 47.)

** d) Die Gleichungen für die Antriebsflugbahn der Rakete, ohne Berücksichtigung von Erdanziehung und Luftwiderstand.

Für die nachstehenden Gleichungen, die hier ohne Herleitung angegeben werden, gelten die Bezeichnungen:

m_0 = Anfangs- (Gesamt)masse der Rakete,

m_e = Endmasse (Masse bei Brennschluß),

m_t = augenblickliche Masse der Rakete, t Sekunden nach Beginn der Bewegung,

m_{Tr} = Masse der Treibladung (also $m_e = m_0 - m_{Tr}$),

T = Zeit bis Brennschluß,

u = Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gase gegenüber der Rakete,

v_t = augenblickliche Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t (absolut, bzw. bezogen auf die Erde),

v_T = Geschwindigkeit bei Brennschluß,

s_t = von der Rakete nach t Sekunden zurückgelegte Flugstrecke, gemessen von der Anfangs- (Ruhe-)lage aus.

s_T = Flugstrecke bis zum Brennschlußpunkt.

Die Gleichungen lauten:

(a)

$$v_t = u \cdot \ln \frac{m_0}{m_t} = 2,3026 \cdot u \cdot \lg \frac{m_0}{m_t}$$

$$\text{mit: } m_t = m_0 - \frac{m_{Tr}}{T} \cdot t.$$

$$(b) \quad v_T = u \cdot \ln \left(1 + \frac{m_{Tr}}{m_e} \right) = 2,3026 \cdot u \cdot \lg \left(1 + \frac{m_{Tr}}{m_e} \right)$$

$$(c) \quad s_t = t \cdot u - \frac{T}{m_{Tr}} \cdot v_t \cdot m_t$$

$$(d) \quad s_T = T \left(u - v_T \frac{m_e}{m_{Tr}} \right)$$

Schließlich ist der dynamische Schub P , den die Rakete durch den Rückstoß der Gase erfährt;

$$(e) \quad P = \frac{m_{Tr}}{T} \cdot w = \frac{G_{Tr} \cdot u}{g \cdot T}$$

Mit diesen Gleichungen kann man die wichtigsten Größen, die für die Planung einer Rakete notwendig sind, bestimmen. Außerdem kann man den Weg und die Geschwindigkeit für jeden Zeitpunkt der Antriebsbahn (nicht völlig genau, da Erdanziehung und Luftwiderstand nicht berücksichtigt sind) berechnen.

Solange $\frac{m_{Tr}}{m_e} < 0,6$ ist (das ist bei $v_T < 800$ m/s, also noch bei ziemlich großen Schußweiten, stets der Fall), kann man die in den angegebenen Gleichungen vorkommenden Logarithmen vermeiden und als gute Näherungen setzen:

$$(f) \quad v_T \approx u \cdot \frac{1}{0,48 + \frac{m_e}{m_{Tr}}}$$

bzw. zur Ermittlung des für eine geforderte v_T notwendigen „Massenverhältnisses“

$$(g) \quad \frac{m_e}{m_{Tr}} \approx \frac{u}{v_T} - 0,48$$

für s_T ergibt sich entsprechend:

$$(h) \quad s_T \approx T \cdot u \cdot \frac{1}{1 + 2,08 \frac{m_e}{m_{Tr}}} = 0,48 \cdot T \cdot v_T$$

Als Beispiel für den Verlauf von v und s auf der Antriebsflugbahn sind in der nachstehenden Tabelle die entsprechenden Werte einer (verhältnismäßig stark beschleunigten) Rakete zusammen-

gestellt. Die Daten dieser Rakete sind:

$$G_0 = 30 \text{ kg} (G_e = 24 \text{ kg}, G_{Tr} = 6 \text{ kg}), a = 1800 \text{ m/s}^2,$$

$$T = 0,6 \text{ s}; \text{ dynamischer Schub: } P = 1835 \text{ kg}.$$

t [sek]	$m_t \cdot g$ [kg]	v_t [m/s]	Δv (für $\Delta t = 0,1 \text{ s}$)	s_t [m]	
0	30	0	}	0	
0,05	29,5	30,3		61,0	0,73
0,08	29,2	48,7		63,2	1,88
0,1	29	61,0		65,4	3,04
0,2	28	124,2		68,0	12,24
0,3	27	189,6		70,6	27,95
0,4	26	257,6		73,5	50,29
0,5	25	328,2		79,56	
$T = 0,6$	$m_e \cdot g = 24$	$v_T = 401,7$		$s_T = 116,00$	

Diese Rakete würde also eine Abschußvorrichtung von der Länge $l = 0,7 \text{ m}$ mit der Geschwindigkeit $v = 30 \text{ m/s}$, eine solche von $l = 1,9 \text{ m}$ mit $v = 49 \text{ m/s}$ (und in diesem letzteren Falle wohl schon von Anfang an stabilisiert fliegend) verlassen.

Selbstverständlich kann die obige Tabelle auch bis zu jeder Einzelzeile gelesen werden, so wäre z. B. für eine Rakete von $G_e = 26 \text{ kg}$, $G_{Tr} = 4 \text{ kg}$, $T = 0,4 \text{ s}$, die Brennschlußgeschwindigkeit $v_T = 257,6 \text{ m/s}$, die Länge der Antriebsflugbahn $s_T = 50,29 \text{ m}$.

Als Zahlenbeispiel für die Energiebilanz sei noch angeführt, daß die letztgenannte Rakete durch ihre 4 kg Treibstoff eine „Brennschlußwucht“ ($W = \frac{m_e}{2} \cdot v_T^2$) von:

$$W = \frac{26 \cdot 257,6^2}{2 \cdot 9,81} = 87\,900 \text{ kg} \cdot \text{m} \text{ erhält.}$$

Der Energieinhalt der Treibladung (= 850 Cal/kg bei Nitrozellulosepulver) beträgt aber in mechanische Energie umgerechnet:

$$E_{Tr} = 4 \cdot 850 \cdot 427 = 1\,400\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Diese Rakete nutzt also den Energieinhalt ihrer Treibladung nur zu $6,3\%$ aus!

C. Abschätzungs- und Näherungsverfahren.

Die genaue zahlenmäßige Erfassung von Flugbahnen ist Sache der mathematischen Ballistik. Die Arbeitsmethoden dieser Wissenschaft setzen aber fast durchweg so viel an mathematischen Kenntnissen voraus, daß sie für die Praxis des Soldaten nicht in Betracht kommen. Genaue ballistische Berechnungen erfordern außerdem viel Zeit, wenn man nicht mit gegebenen Tabellenwerken größeren Umfangs oder mit besonderen Rechenmaschinen von kompliziertem Aufbau rechnen kann. Für den Praktiker -- den Soldaten oder den in der Waffentechnik tätigen Ingenieur -- kommt es aber meistens darauf an, gewisse Aufgaben über die Flugbahn schnell zur Hand zu haben, er braucht also Verfahren, die einfach, möglichst auch rechenwieberhandlich sind, selbst wenn ihre Genauigkeit nicht die der Ergebnisse strenger ballistischer Berechnungen erreicht.

Tatsächlich ist es meistens möglich, auch ohne die Hilfsmittel der höheren Mathematik (mit oder ohne Benutzung einer Schußtafel) rasch brauchbare Abschätzungen vorzunehmen. Hierzu

dienen die im folgenden angegebenen Näherungsverfahren, die in erster Linie mit Rücksicht darauf aufgestellt sind, daß sie sich möglichst leicht handhaben lassen und sich auch nicht allzu schwer dem Gedächtnis einprägen.

Die Genauigkeit der Ergebnisse dieser Näherungsverfahren ist in der großen Mehrzahl aller Fälle für die in der Praxis des Schießens auftretenden Fragestellungen durchaus genügend. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß Näherungen immer mit einem gewissen Verständnis für das, was sie leisten können, anzuwenden sind, und daß man sich stets über die Größenordnung des bei jeder Näherung möglichen Fehlers klar sein muß. Besondere Vorsicht ist geboten, wenn Größen, die selbst nur angenähert bekannt sind, in Näherungsformeln eingesetzt werden. Der Fehler im Endergebnis kann dadurch untragbar groß werden.

Einige der folgenden Regeln sind von der Flugbahn im luftleeren Raum übernommen. Das kann zulässig sein, wenn man sich auf ganz kurze Stücke der Flugbahn (besonders in der Nähe der Mündung, des Gipfels oder Fallpunkts, s. S. 51, 57, u. 60) beschränkt, oder wenn man nicht absolute Angaben übernimmt, sondern Aussagen über Verhältnisse von Größen. Solche Aussagen können u. U. im luftgefüllten Raum Gültigkeit behalten (s. S. 54 u. 67).

Die Beispiele für die nachstehenden Regeln sind zu einem Teil der H. Dv. 400 „alt“ (Lehrschußtafel) entnommen; der Leser kann sie jedoch vollständig durchrechnen, auch ohne daß er diese Tafel verfügbar hat, da alle in Frage kommenden Zahlenwerte hier aufgeführt sind. Ein weiterer Teil der Beispiele bezieht sich auf die in den Tabellen auf S. 48 ff aufgeführten, genau durchgerechneten Flugbahnen. Diese Musterflugbahnen sollen es dem Leser ermöglichen, sich außer an den angegebenen Beispielen noch an weiteren, selbst gewählten, zu üben und sich durch Nachprüfen des Ergebnisses das Verständnis für die erreichbare Genauigkeit zu erarbeiten.

Viele der angegebenen Regeln enthalten Zahlenfaktoren oder der Erfahrung entnommene Größen. Diese Zahlen sind auf Grund ausgedehnten genaueren ballistischen Materials so gewählt, daß sie bei Kalibern von 8,8 cm bis 17 cm dem v_0 -Bereich zwischen 200 m/s und 700 m/s möglichst gut gerecht werden.

[Der Einfachheit halber sind die betreffenden Zahlenwerte, die für das übliche technische Maßsystem gelten, dimensionslos geschrieben. Selbstverständlich ist z. B. der Faktor 1,25 in Gl. 24 auf S. 54 dem Sinne nach keine unbenannte Zahl, sondern von der Dimension $m \cdot s^{-2}$.]

Man beachte bei solchen Näherungen, in die φ eingeht, daß dieser Winkel den Abgangswinkel bedeutet. Ist der Abgangsfehler nicht bekannt, so kann bei gröberen Abschätzungen der Abgangswinkel gleich der Erhöhung gesetzt werden. Bei genauerer Rechnung, namentlich bei flachen Flugbahnen, kann jedoch die Vernachlässigung des Abgangsfehlers das Ergebnis wesentlich fälschen.

Leider kann man nicht alle folgenden Näherungsregeln mit demselben Anspruch auf Genauigkeit wie bei Flugbahnen von normalen Artilleriegeschossen auch auf die Raketenflugbahn übertragen, es bleiben aber für die Rakete alle diejenigen (zeichnerischen oder rechnerischen) Verfahren unverändert gültig, bei denen lediglich der Schußtafel entnommene Werte des Fallpunkts (ω , r_e) verwendet werden. Da der Unterschied zwischen der Raketenflugbahn und der des normalen Artilleriegeschosses mit kürzer werdender Brenzeit klein wird, können für Raketen mit sehr kurzer Brenzeit alle Formeln verwendet werden (mit Ausnahme derer, die sich auf den allerersten mündungsnächsten Teil beziehen, Abschnitt II, S. 51), wenn auch mit etwas kleinerem Anspruch auf Genauigkeit.

Zum schnellen Auffinden eines benötigten Näherungsverfahrens sind die wichtigsten Formeln usw. noch einmal in dem Flugbahnbild mit Formelsammlung auf S. III zusammengestellt. Aus dieser zeichnerischen Darstellung ergibt sich auch die Bedeutung sämtlicher Buchstabenbezeichnungen der nachstehenden Abschnitte.

I) Musterflugbahnen, Teil A.

(als Beispiele und zur Nachprüfung der Näherungsverfahren)

Nr.	φ	v_0 [m/s]	Kal [cm]	v_g [m/s]	x_g [m]	y_g [m]	X [m]	T [s]	v_e [m/s]	ω	Bemerkungen
I	10°	260	7,5	239,66	1102	99	2160	9,00	229,8	10° 50'	} durch φ voneinander verschieden
II	40°	260	7,5	169,28	2833	1251	5418	31,92	208,2	45° 25'	
III	10°	260	15,0	245,22	1122	101	2226	9,08	239,5	10° 32'	} desgleichen
IV	40°	260	15,0	178,67	3011	1308	5842	32,64	249,2	43° 39'	
V	10°	520	7,5	327,82	2826	286	5149	14,96	279,0	14° 42'	} desgleichen
VI	40°	520	7,5	219,30	5815	2831	10704	47,21	267,8	51° 51'	
VII	10°	520	15,0	363,08	3243	319	5957	15,91	308,1	14° 02'	} desgleichen
VIII	40°	520	15,0	246,37	6934	3309	12952	51,18	300,0	49° 59'	
IX	42°	620	15,0	253,5	8949	4692	16598	60,72	327,8	53° 35'	Flugbahn mit größtem X bei dieser v_0
X	20°	900	7,5	263,7	5409	1319	9182	30,87	229,7	38° 23'	
XI	20°	550	17,0	284,9	4443	1005	8186	27,69	257,2	30° 20'	
XII	45°	550	12,8	194,2	6069	3475	10723	53,75	265,5	59° 30'	
XIII	66° 22'	230	22	78,6	1651	2017	3200	40,7	206,0	70° 02'	Größte Erhöhung, bei der dieses Geschöß stabil fliegt.
XIV	44°	640	24	256,6	10840	6150	19066	68,8	380,4	58° 21'	Weitere Angaben zu dieser Flugbahn siehe Abschnitt B, V.

Musterflugbahnen. Teil B.

(Die Musterflugbahnen I, II, V, VI, VIII in genauen Angaben; die Gipfelwerte sind besonders kenntlich gemacht.)

a) Flugbahn I, $\varphi = 10^\circ$, $v_0 = 260 \text{ m/s}$, $Kal = 7,5 \text{ cm}$

x	y	t
124	21	0,49
371	55	1,47
618	79	2,46
860	94	3,45
1102 = x_g	99 = y_g	4,45
1341	94	5,45
1577	79	6,54
1811	55	7,47
2044	21	8,49
2219	— 12	9,26
2668	— 123	11,29
3008	— 234	12,85
3534	— 457	15,36

b) Flugbahn II, $\varphi = 40^\circ$, $v_0 = 260 \text{ m/s}$, $Kal = 7,5 \text{ cm}$

x	y	t
2492	1231	13,56
2663	1246	14,56
2833 = x_g	1251 = y_g	15,56
3002	1246	16,56
3170	1231	17,56
3337	1207	18,57
3502	1173	19,58
3629	1140	20,36
3952	1029	22,35
4198	918	23,90
4584	695	26,37
4893	473	28,39
5277	140	30,96
5806	— 416	34,56
6221	— 971	37,63

c) Flugbahn V, $\varphi = 10^\circ$, $v_0 = 520 \text{ m/s}$, $Kal = 7,5 \text{ cm}$

x	y	t
1464	208	3,19
1821	244	4,13
2165	266	5,10
2499	281	6,07
2826 = x_g	286 = y_g	7,07
3146	281	8,08
3459	266	9,10
3766	244	10,11
4068	208	11,14
4294	175	11,93
4868	64	13,99
5305	— 47	15,59
5958	— 270	18,14
6476	— 492	20,26
7094	— 825	22,94

d) Flugbahn VI, $\varphi = 40^\circ$, $v_0 = 520 \text{ m/s}$, $Kal = 7,5 \text{ cm}$

x	y	t
3396	2175	11,62
3956	2498	13,92
4312	2609	15,41
4755	2720	17,34
4927	2753	18,09
5150	2787	19,07
5372	2811	20,06
5595	2826	21,06
5815 = x_g	2831 = y_g	22,06
6033	2826	23,06
6251	2811	24,06
6466	2787	25,07
6681	2753	26,09
6845	2720	26,87
7264	2609	28,87
7578	2498	30,42
8075	2175	32,88
8473	2053	34,92
8970	1720	37,48
9635	1164	41,09
10181	609	44,17
10654	53	46,94
11068	— 502	49,52
11779	— 1613	54,25

e) Flugbahn VIII, $\varphi = 40^\circ$, $v_0 = 520$ m/s, Kal = 15 cm

x	y	t
5940	3232	20,19
6189	3265	21,18
6439	3289	22,17
6687	3304	23,17
6934 = x_g	3309 = y_g	24,17
7179	3304	25,17
7424	3289	26,17
7667	3265	27,18
7910	3231	28,18
8103	3198	28,96
8567	3087	30,96
8928	2976	32,50
9496	2753	34,94
9951	2531	36,95
10521	2198	39,50
11291	1642	43,03
11933	1087	46,06
12480	531	48,77
12968	— 24	51,27
13815	— 1135	55,83

II. Näherungsverfahren für den ersten, mündungsnahen Teil der Flugbahn (nicht für Raketenflugbahnen!)

a) Ermittlung von Flughöhen im ersten Teil des aufsteigenden Astes.

Trägt man ebenso wie bei der Herleitung der Gl. 2 (s. S. 13) von der verlängerten Abgangsrichtung aus die Fallstrecken nach unten ab, so erhält man für den mündungsnahen Teil der Flugbahn (auch im luftgefüllten Raum) brauchbare Angaben über die Höhenlage von Flugbahnpunkten, bezogen auf die verlängerte Abgangsrichtung.

1. Beispiel: zugleich Beispiel für die Änderung der Höhenlage des Treffpunktes bei einer v_0 -Änderung (Lehrschußtafel). Der mittlere Treffpunkt liegt bei 5. Ldg. ($v_0 = 370$ m/s) auf einer senkrechten Zieloberfläche in 700 m Entfernung. Um wieviel tiefer liegt der mittlere Treffpunkt bei der 4. Ldg. ($v_0 = 302$ m/s)?

Die Flugzeit beträgt bei der 5. Ldg. 2 s, das Geschöß ist am Ziel um $2^2 \cdot 5 = 20$ m von der verlängerten Seelenachse gefallen. Die Flugzeit bei der 4. Ldg. beträgt 2,4 s, die Fallstrecke also $2,4^2 \cdot 5 = 28,8$ m, der Treffpunkt wird um $28,8 - 20 = 8,8$ m gesenkt.

Für die Praxis des Artilleristen ist diese Übersichtsrechnung u. a. in folgendem Falle wichtig: Beim Erschießen der v_0 (Grundstufenbestimmung) wird in der Regel durch zwei in der Schußrichtung hintereinanderstehende Rahmen geschossen. Diese Rahmen haben sowohl vom Geschütz wie untereinander eine gewisse Mindestentfernung; das fallende Geschöß darf natürlich nicht den unteren Rahmenrand treffen. Es muß also dafür gesorgt werden, daß die verlängerte Seelenachse

beim geschütz nähern Rahmen um ein kleineres, beim geschütz ferneren um ein größeres Maß, das sich jeweils entsprechend dem obigen Beispiel errechnet, über der Rahmenmitte verläuft.

Ist für ein gegebenes, nicht zu großes x die Flughöhe über der Abgangsebene gesucht, so bringt man das im obigen Beispiel durchgeführte Verfahren in die Form der Gleichung:

$$(20) \quad y \approx x \cdot \tan \varphi - \frac{g}{2} t^2$$

2. Beispiel; (Lehrschußtafel). Wie groß ist in der 4. Ldg. die Flughöhe der Flugbahn mit $X = 3500$ m bei $x = 700$ m? $\varphi = 237^\circ + 4^\circ = 241^\circ$. Der genaue Wert für die einzusetzende Flugzeit t ist zwar nicht bekannt; bei dieser noch einigermaßen flachen Flugbahn kann man aber für t die Endflugzeit zur Schußweite 700 m ($T_{700} = 2,4$ s) einsetzen. Das gibt:

$$y \approx 700 \cdot 0,241 - \frac{9,81}{2} \cdot 2,4^2 = 168,7 - 28,7 = 140 \text{ m.}$$

In der Praxis wird man wohl meistens das in die Gl. 20 einzusetzende t so ermitteln, wie es im Beispiel 2 durchgeführt wurde, da es im allgemeinen doch nur bei flachen Flugbahnen wichtig ist, Flughöhen des aufsteigenden Astes zu kennen (vorliegende Deckung!).

In jedem Falle aber, auch bei steiler Flugbahn, kann man die Flughöhe nach der für den gesamten Flugbahnbereich gültigen Näherungsgleichung 31 (S. 69) ermitteln, die allerdings die Kenntnis des Fallwinkels voraussetzt. Die Nachprüfung des obigen Beispiels nach Formel 31 ($\omega = 283^\circ$) ergibt: $y = 139,5$ m, also eine sehr gute Übereinstimmung mit dem oben ermittelten Wert.

b) Faustformel für den v -Abfall.

(Für kurze Flugstrecken und flache Flugbahnen.)

Die Geschwindigkeit nach der Flugstrecke s sei v_s der bis dahin eingetretene Geschwindigkeitsabfall, $v_0 - v_s$, sei Δv . Dann gilt:

$$(21) \quad v_s \approx v_0 - \frac{C}{C + s}$$

und:

$$(22) \quad \Delta v \approx v_0 \frac{s}{C + s}$$

Hierbei ist C eine feste Zahl, die für Geschößgeschwindigkeiten über 360 m/s etwa den Wert 500 mal dem Kaliber in cm, für Geschößgeschwindigkeiten unter 320 m/s etwa den Wert 1500 mal dem Kaliber in cm hat. (Der dazwischenliegende Geschwindigkeitsbereich in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit läßt sich nicht in so einfacher Weise erfassen.) Der Anwendungsbereich der Formeln beschränkt sich auf kurze Flugstrecken, außerdem auf flache Flugbahnen, so daß die durch die Erdanziehung hervorgerufene Änderung der Geschößgeschwindigkeit gegenüber derjenigen, die der Luftwiderstand hervorbringt, vernachlässigt werden kann.

** Herleitung der Formeln: Innerhalb eines gewissen — nicht zu großen — Geschwindigkeitsbereichs gilt genügend genau das quadratische Luftwiderstandsgesetz, dem man die Form geben kann: Verzögerung = $-dv/dt = 1/C \cdot v^2$. Hierin ist $1/C$ eine für den in Frage kommenden Bereich durch

Versuche zu bestimmende Konstante. [Daß C mit der Länge des Geschosses – und damit bei ähnlichen Geschossen auch mit dem Kaliber – linear zusammenhängt, folgt aus Gl. 18a (S. 26) und aus der Erklärung der Querschnittsbelastung.] Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt für $v = v(s)$ einen Ausdruck, der für den Rechenschiebergebrauch nicht besonders handlich ist.

Nun verändert man die gegebene Differentialgleichung etwas, indem man ihren Zähler mit v , ihren Nenner mit v_0 vervielfacht, und erhält so:

$$\frac{1}{C} \cdot v^2 \approx \frac{1}{C} \cdot \frac{v^3}{v_0} \approx - \frac{d v}{d t}$$

(Dieses „Erweitern“, im Zähler mit einer Veränderlichen, im Nenner mit einer Konstanten, ist um so eher als Näherung zulässig, je kleiner der v -Abfall ist, auf den man sich bei der Anwendung der endgültigen, integrierten Formel beschränkt.) Weiterhin ist (Kettenregel!):

$$- \frac{d v}{d t} = - \frac{d v}{d s} \cdot \frac{d s}{d t} = - \frac{d v}{d s} \cdot v, \text{ also:}$$

$$- \frac{d v}{d s} = \frac{1}{C} \cdot \frac{v^2}{v_0}$$

Trennt man hierin die Veränderlichen und integriert mit der Anfangsbedingung: $s = 0, v = v_0$, so erhält man:

$$v \approx v_0 \cdot \frac{C}{C + s}$$

Ersetzt man noch v durch $v_0 - \Delta v$, so folgt nach leichter Umformung:

$$\Delta v \approx v_0 \cdot \frac{s}{C + s}$$

1. Beispiel: (Lehrschußtafel). v -Abfall für 350 m.

Ldg.	$s + C$	Δv (350) Nach Gl. 22	Δv (350) Nach Schußtafel
1	16 100	4,2	5
4	16 100	6,6	8
5	5 600	23,1	21

Es ist zweckmäßiger, mit Gl. 22 zu arbeiten als mit Gl. 21. Die Genauigkeit ist um so größer, je kleiner s ist. Gl. 21, nach v_0 aufgelöst ist auch als Faustformel zum Umrechnen einer gemessenen Geschwindigkeit auf die v_0 brauchbar.

2. Beispiel: Auf S. 85 ist ein Flugbahnstück für das Kaliber 10,5 cm genau berechnet. Es reicht von der Mündung bis zum Punkt: $x_1 = 244,9$ m, $y_1 = 48,7$ m. $v_0 = 410$ m/s. Wie groß ist Δv nach Gl. 22 bis zu diesem Punkt?

Die Bahnlänge s ergibt sich genügend genau aus $s \approx \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, also: $s \approx 270$ m. Somit ist:

$$\Delta v \approx 410 \cdot \frac{270}{5250 + 270} = 410 \cdot \frac{270}{5520} = 20,0 \text{ m.}$$

Die Näherungsgleichung 22 liefert, wie man sieht, in diesem Falle genau den richtigen Wert (s. S. 85).

Aus der Gl. 22 läßt sich noch eine Faustregel herleiten, die den Vorteil hat, besonders einfach zu sein und sich dadurch dem Gedächtnis leicht einzuprägen. Sie gibt diejenige Strecke s an, nach deren Zurücklegung die v_0 um 1% gesunken ist. Setzt man den prozentualen v -Abfall (gebildet aus Gl. 22) gleich 1 und gleichzeitig für C den Wert: 500 mal Kal. (in cm), so erhält man:

$$1 = \frac{A v}{v_0} \cdot 100 = \frac{100 s}{500 \text{ mal Kal. (in cm)} + s}$$

s im Nenner kann gegen den ersten, sehr viel größeren Summanden vernachlässigt werden. So ergibt sich:

$$1 \approx \frac{s}{5 \text{ mal Kal.}}$$

und für den Flugweg s , dem ein v -Abfall von 1% entspricht,

(23)	s [in m]	≈ 5 mal dem Kaliber [in cm]
	(für v -Abfall = 1%)	für $v_0 > 360$ m/s,
	bzw.:	≈ 15 mal dem Kaliber [in cm]
		für $v_0 < 320$ m/s.

In Worten: Vervielfacht man das GeschöÙkaliber (in cm) mit 5 (bzw. bei den kleineren Ladungen mit 15), so erhält man diejenige Strecke (in m), auf der das GeschöÙ 1% seiner v_0 durch den Luftwiderstand einbüÙt.

Beispiel: (Lehrschußtafel). Bei den kleineren Ladungen, bis einschl. der 4. Ldg., beträgt die Flugstrecke, nach der die v_0 um 1% gesunken ist, $15 \cdot 10,5 =$ rund 160 m, bei der 5. Ldg. ist sie $5 \cdot 10,5 =$ rund 50 m.

III. Näherungen für die Werte des Gipfelpunktes.

a) Gipfelhöhe aus der Endflugzeit.

$$(24) \quad y_g \approx 1,25 \cdot T^2 \quad (\text{Hauptsche Formel}).$$

Die Formel ist gleichbedeutend mit der Gl. 10 auf S. 15, mit 1,25 an Stelle von $g/8$. Die Beziehung zwischen y_g und T , die im luftleeren Raum streng richtig ist, behält ihren Wert als sehr gute Näherung auch im luftgefüllten Raum, unabhängig von Kaliber, Abgangsrichtung und Anfangsgeschwindigkeit.

Im Kopf rechnet man zweckmäßigerweise so: Endflugzeit ins Quadrat, vermehrt um $\frac{1}{4}$ des erhaltenen Wertes.

Beispiel: 1. Wie groß ist höchstens die Endflugzeit aller derjenigen Flugbahnen (beliebiger Schußwaffen), deren Flughöhe nirgends 2 m übersteigt, so daß für einen Panzer von Durchschnittshöhe die bestrichene Entfernung in ebenem Gelände sich über den ganzen Flugbahnbereich erstreckt?

$2 = 1,25 \cdot T^2$, daraus: $T \approx 1,3$ s. Würde die GeschöÙgeschwindigkeit im Fluge nicht abnehmen, so würde das GeschöÙ in diesen 1,3 s eine Strecke vor dem Geschütz von der Länge 1,3 mal der v_0 überfliegen und sich dabei nirgends um mehr als 2 m über die Abgangsebene erheben. Anders ausgedrückt: Für Flugbahnen bis zu $X = 1,3 \cdot v_0$ würde sich die bestrichene Entfernung von der Mündung bis zum Fallpunkt erstrecken. Wegen der v -Abnahme, die infolge des Luftwiderstandes eintritt, reicht in Wirklichkeit die „vollständige bestreichbare Entfernung“ nur

bis zu einer Entfernung von rund $1,2 \cdot v_0$ Meter. Dieser runde Wert ist für die Panzerbekämpfung wichtig; innerhalb dieses Bereichs ist es nicht mehr sinnvoll, für Änderungen der Aufsatzentfernung kostbare Zeit aufzuwenden.

2. Bei den Musterflugbahnen I und VI (S. 48) errechnen sich folgende Werte für y_g :

Flugbahn Nr.	$1,25 T^2$	y_g (genau)	Fehler in %
I	101	99	+ 2%
VI	2784	2831	- 1,7%

b) Abschätzung der Gipfelhöhe aus Schußweite und Abgangswinkel.

(25)

$$\frac{X}{4} \cdot \tan \varphi < y_g < \frac{X}{4} \cdot \tan \omega$$

Die Gipfelhöhe jeder Flugbahn ist größer als $\frac{1}{4} X \cdot \tan \varphi$ und kleiner als $\frac{1}{4} X \tan \omega$. Bei unbekanntem Fallwinkel (und unbekannter Flugzeit, sonst einfacher nach Gl. 24) kann der erste Ausdruck allein zur Abschätzung dienen. Die Gleichung wird durch folgende Überlegung (siehe Bild 20) anschaulich gemacht:

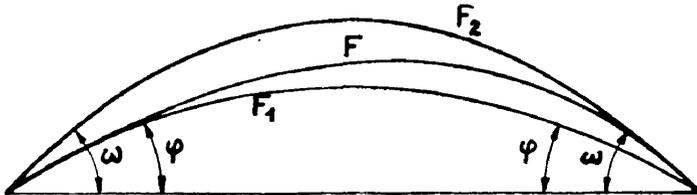


Bild 20: Die wahre Flugbahn (F) läßt sich zwischen 2 Wurfparabeln einschließen, von denen die eine (F_1) die Erhöhung φ , die andere (F_2) die Erhöhung ω hat.

Neben der wahren Flugbahn (F) werde diejenige Parabel (F_1) betrachtet, die mit F gleiche Schußweite und gleichen Abgangswinkel hat. Ihr Fallwinkel ist ebenfalls φ , sie verläuft ganz unter der Flugbahn F (die zugehörige v_0 ist natürlich kleiner). Die Gipfelhöhe von F_1 ist $\frac{1}{4} \cdot X \cdot \tan \varphi$ (s. Gl. 9). Nun werde diejenige Parabel (F_2) betrachtet, die mit F gleiche Schußweite und gleichen Fallwinkel (ω) hat. Ihr Abgangswinkel ist auch ω ; sie verläuft ganz oberhalb von F . Die zugehörige Gipfelhöhe ist $\frac{1}{4} \cdot X \cdot \tan \omega$. Es ist einleuchtend, daß die Gipfelhöhe von F zwischen den Gipfelhöhen von F_1 und F_2 liegt.

Beispiel: (Lehrschußtafel). 3. Ldg., $X = 4000$ m, $\varphi = 446^\circ$ ($442^\circ + 4^\circ$ Abgangsfehler), $\omega = 524^\circ$.

$$\frac{X}{4} \cdot \tan \varphi = 468 \text{ m,}$$

$$\frac{X}{4} \cdot \tan \omega = 565 \text{ m,}$$

$$y_g \text{ (nach Gl. 24, } T = 20,4 \text{ s)} = 512 \text{ m.}$$

c) Gipfelhöhe derjenigen Flugbahn, die die Höchstschußweite ergibt.

$$(26) \quad \frac{1}{4} X_{\max} < y_g < \frac{1}{3} X_{\max}$$

Die Gipfelhöhe der Flugbahn mit der Höchstschußweite liegt im allgemeinen zwischen einem Drittel und einem Viertel dieser Höchstschußweite. Die linke Seite folgt aus der linken Seite von

Regel 25 für $\tan \varphi = 1$ (beide Grenzen können, wenn auch nur knapp, über- bzw. unterschritten werden, d. h. es kann bei kleiner v_0 die Gipfelhöhe noch etwas kleiner als $\frac{1}{4} X_{\max}$, bei großer v_0 etwas größer als $\frac{1}{3} X_{\max}$ werden).

1. Beispiel: (Lehrschußtafel) 3. Ldg., $X_{\max} = 4950$ m, $T = 33,4$ s, daraus (nach Gl. 24)

$$y_g = 1372 \text{ m} = \frac{1}{3,61} \cdot X_{\max}.$$

2. Beispiel: Ein Geschütz hat die Höchstschußweite 18 km. Die zugehörige Gipfelhöhe läßt sich sofort zu 4,5 bis 6 km abschätzen. Die Flugzeit liegt dann (nach Gl. 24) zwischen 61 und 70 s. Da die v_0 groß sein muß (Schußweite!), ist die Flugbahn parabelunähnlich. Die höheren Werte von y_g und T dürften also richtiger sein.

d) Abschätzung der Gipfelentfernung.

I. Mit Hilfe der Schußtafel.

Die Erhöhung der Flugbahn, deren Gipfelentfernung (x_g) gesucht ist, sei ε . Man sucht nun in der Schußtafel diejenige Flugbahn, für welche die Erhöhung (ε_1) und der Fallwinkel (ω_1) zusammengezählt ε ergeben. Die zu ε_1 gehörige schußtafelmäßige Schußweite ist annähernd die gesuchte Gipfelentfernung. Das Verfahren ist weiter nichts als eine Anwendung des „Schwenkens der Flugbahn“ (S. 23), wobei außerdem die Schrägentfernung zum Gipfel gleich der Horizontalentfernung gesetzt wird. Die dadurch gemachten Fehler heben sich zwar zum Teil gegenseitig auf, immerhin ist das Verfahren nur für flache Flugbahnen zulässig.

Beispiel: (Lehrschußtafel) 4. Ldg., $X = 3000$ m (die Flugbahn kann als flach gelten, ihre Gipfelhöhe ist rund 160 m). $\varepsilon = 194^\circ$, die Flugbahn, für welche die Summe von Erhöhung und Fallwinkel diesen Betrag ergibt, ist die mit $X = 1600$ m ($\varepsilon_1 = 91^\circ$, $\omega_1 = 103^\circ$). Die Gipfelentfernung ist also rund 1600 m.

II. Ein einfacher, aber brauchbarer Anhalt bei Feldgeschützen ist:

(27)

$$x_g = \frac{X}{2} \cdot 1,1.$$

III. Bei bekannter v_0 erhält man x_g meist etwas genauer aus:

(27a)

$$x_g \approx X \left(0,5 \div \frac{v_0}{10000} \right)$$

Beispiele siehe S. 57.

e) Gipfelentfernung aus Gipfelhöhe und Erhöhung.

Brauchbare Näherungsformeln sind:

(28)

$$x_g \approx \frac{X}{4} \div y_g \cdot \cot \varphi \approx \frac{X}{4} \div 1,25 T^2 \cdot \cot \varphi$$

(Herleitung s. S. 73);

noch genauer ist die folgende Formel, die allerdings die Kenntnis des Fallwinkels voraussetzt:

(29)

$$x_g \approx \frac{X}{2} \div \frac{y_g}{4} \left(\cot \frac{\varphi}{2} - \cot \frac{\omega}{2} \right) \approx \frac{X}{2} \div 0,312 T^2 \left(\cot \frac{\varphi}{2} - \cot \frac{\omega}{2} \right)$$

Beispiele: für die Formeln 27, 27a, 28 und 29, gerechnet an der Musterbahn Nr. I (s. S. 48); wahrer Wert von $x_g = 1102$ m.

1. Gl. 27:

$$x_g = 2160 \cdot 0,55 = 1188 \text{ m, (Fehler} = 86 \text{ m).}$$

2. Gl. 27a:

$$x_g = 2160 \cdot 0,526 = 1137 \text{ m (Fehler} = 35 \text{ m).}$$

3. Gl. 28:

$$x_g = 540 + 1,25 \cdot 9^2 \cdot 5,67 = 540 + 574 = 1114 \text{ m (Fehler} = 12 \text{ m).}$$

4. Gl. 29:

$$x_g = 1080 + 0,312 \cdot 9^2 (11,430 - 10,546) = 1080 + 21 = 1101 \text{ m}$$

(der Fehler von 1 m liegt praktisch innerhalb der Rechengenauigkeit und ist bedeutungslos).

f) Geschößgeschwindigkeit im Gipfelpunkt.

Die Gipfelgeschwindigkeit (v_g) erhält man mit guter Annäherung aus der Gleichung:

(30)

$$v_g \approx \frac{X}{T}$$

Diese Gleichung ist im luftleeren Raum streng richtig (Nachprüfung mit den Gl. 6, 5 und 4). Ebenso läßt sie sich unter der vereinfachenden Annahme, daß der Luftwiderstand proportional der ersten Potenz der Geschößgeschwindigkeit anwachse, beweisen.

Als sehr gute Näherung behält sie unter den tatsächlich bestehenden Verhältnissen bei flachen Flugbahnen von kleiner bis mittlerer v_0 Gültigkeit; bei steileren Bahnen, deren v_0 über Schallgeschwindigkeit liegt, liefert sie etwas zu große Werte.

Beispiele: 1. Musterflugbahn Nr. IV (S. 48):

$$v_g = \frac{5842}{32,64} = 179 \text{ m/s (wahrer Wert: 178,67 m/s),}$$

dagegen:

2. Musterbahn Nr. XII ($\varphi = 45^\circ$, $v_0 = 550$ m/s):

$$v_g \approx \frac{10\,723}{53,75} = 200 \text{ m/s (wahrer Wert: 194,2 m/s).}$$

3. s. Beispiele zu III, g, S. 58, und zu IV, a, 2, S. 60.

g) Ersatz der Flugbahn durch eine Parabel in der Nähe des Gipfelpunktes

Sind Gipfelkoordinaten und Gipfelgeschwindigkeit — genau oder angenähert — bekannt, so kann man für den Beginn des absteigenden Astes ähnlich rechnen wie in Mündungsnähe (s. I.a, S. 51) und somit Flughöhen in Gipfelnähe angenähert ermitteln.

Beispiele: 1. s. Beispiel zu IV, a, 2, S. 60.

2. Für die Musterbahn Nr. VIII (S. 48) ist:

$$x_g = 6934 \text{ m, } y_g = 3309 \text{ m, } v_g = 246,37 \text{ m/s.}$$

Wie groß ist die Flughöhe y bei $x = 7670$ m?

Der Punkt mit $x = 7670$ m liegt 736 m weiter als der Gipfel, er wird vom

Geschöß also $\frac{736}{240} = 3,06$ s nach Überschreiten des Gipfels erreicht (240 m/s

ist als runder Mittelwert für die — absinkende! — Geschößgeschwindigkeit angenommen). In diesen 3,06 s fällt das Geschöß von der waagerechten Gipfeltangente um $s = \frac{g}{2} t^2 = \frac{9,81}{2} \cdot 3,06^2 = 46$ m. Für die gewünschte Flughöhe erhält man also: $3309 - 46 = 3263$ m. Der genaue Wert dürfte 3264 m sein (für $x = 7667$ m ist $y = 3265$ m, s. Angaben der Musterbahn); der Fehler von 1 m ist bedeutungslos.

Man ermittle zur Übung die Gipfelwerte auch angenähert aus den Elementen, die eine gebräuchliche Schußtafel liefert, d. h. wie sie in der Praxis meist verfügbar sind, und führe damit die Rechnung durch. Es ergibt sich: $x_g \approx 6844$ m (nach Gl. 29), $y_g \approx 3289$ m (nach Gl. 24), $v_q \approx 253$ m/s (nach Gl. 30). Eine Rechnung, die der oben durchgeführten entspricht, liefert dann: $y(x = 7670) \approx 3224$ m, also einen Wert, der trotz der angenäherten Gipfelwerte um nur 40 m, d. h. um 1,2%, falsch ist.

IV. Näherungen für den absteigenden Ast und für die Werte des Fallpunktes.

Wichtige Vorbemerkung zu diesem Abschnitt: Bei mehreren der nachstehend aufgeführten Verfahren geht der Fallwinkel in die Rechnung oder Zeichnung ein. Ist eine Flugbahn durch besondere oder Witterungseinflüsse verformt, also nicht schußtafelmäßig, so ist es im allgemeinen richtiger, wenn man der Schußtafel den Fallwinkel zur Erhöhung (unter Einrechnung der Libellenänderung für die Grundstufe) entnimmt, als wenn dies zur Kartentfernung geschieht. Man überzeugt sich an Hand einer beliebigen Schußtafel leicht, daß eine Änderung der Ladung bei gleicher Erhöhung der Fallwinkel viel weniger ändert, als dieselbe Änderung der Ladung bei gleicher schußtafelmäßiger Schußweite, daß also der Fallwinkel im wesentlichen der Erhöhung folgt.

Die nachstehenden Verfahren sind auch für Raketen brauchbar.

a) Ermittlung von Flughöhen im absteigenden Ast.

Diese Aufgabe dürfte wohl für den praktischen Schießbetrieb die wichtigste sein. Sie kann, mehr oder weniger genau, auf verschiedene Arten gelöst werden.

1. Mit der Libellentafel.

Steht eine Libellentafel zur Verfügung, so kann man mit ihr die Höhe der Flugbahn an einem Punkt, dessen Entfernung gegeben ist, bestimmen.

aa) Im Bereich der Libellentafel.

Das Verfahren ist im Bereich der Libellentafel besonders einfach. Es wird am schnellsten klar am

Beispiel: (Lehrschußtafel) 3. Ldg., $X = 4700$ m, welches ist die Flughöhe bei 4500 m? Für $X = 4700$ m ist die Erhöhung 617', für $X = 4500$ m ist sie 554', die Differenz der Erhöhungen beträgt also 63'.

Man sucht nun in der Libellentafel bei 4500 m die Libelle 363 und findet durch Zwischenschalten, daß die Flugbahn an dieser Stelle 168 m hoch liegt.

Innerhalb des Bereichs der Libellentafel liefert die Rechnung genaue Werte, abgesehen von kleinen Ungenauigkeiten, die durch das Zwischenschalten (Interpolieren), das häufig nötig sein wird, sowie durch die Auf- bzw. Abrundung der Tafelwerte zustandekommen.

bb) Außerhalb des Bereichs der Libellentafel.

Überschreitet die Differenz der beiden Erhöhungen den Bereich der Libellentafel, so kann man die Flughöhe näherungsweise mit Hilfe der Libellentafel auf folgende Weise ermitteln:

Man stellt fest, das Wievielfache einer noch in der Libellentafel enthaltenen Libelleneinstellung (d. h. selbstverständlich nur des Überschusses über 300) die Differenz der Erhöhungen, die man entsprechend dem obigen Beispiel ermittelt, darstellt. Mit der so erhaltenen Zahl vervielfacht man den zu der betreffenden Libelleneinstellung gehörenden Höhenunterschied und erhält so die Flughöhe. Diesem Verfahren liegt die Annahme zugrunde, daß die Libelleneinstellung proportional dem Höhenunterschied anwachse (vergleichbar der Annahme von der Schwenkbarkeit der Flugbahn, s. S. 23). Diese Proportionalität besteht in Wirklichkeit nicht oder doch nur angenähert. Die Werte, die man für die Flughöhen erhält, sind also Näherungswerte, die im allgemeinen um so ungenauer sind, je weiter man sich von demjenigen Libellenwert, der der Rechnung zugrunde liegt, entfernt. Aus diesem Grund, und um zu vermeiden, daß die Auf- bzw. Abrundung der Tafelwerte das Ergebnis nennenswert fälscht, geht man zweckmäßigerweise von einem recht großen Libellenwert aus (s. Lib. 370 des nachstehenden Beispiels). Andererseits lohnt es sich nicht, eine allzu große Genauigkeit an die Rechnung zu wenden, man wird also diesen Libellenwert, den man der Rechnung zugrunde legt, praktisch so wählen, daß sich durch runde Zahlen eine einfache Rechnung ergibt.

Beispiel: (Lehrschußtafel) 5. Ldg. $X = 7500$ m, gesucht Flughöhe bei 6200 m? Die Erhöhungen sind 591[—] und 396[—], ihre Differenz also 195[—]. Der Libellenüberschuß über 300 beträgt bei 6200 m und 350 m Zielhöhe 70[—]. Als ungefähre Flughöhe ergibt sich also: $\frac{350 \cdot 195}{70} = 975$ m. Oder (für eine im Kopf durchzuführende Überschlagsrechnung passender gewählt): Der fünfte Teil von 195 ist 39, zur Libelle 339 gehört die Zielhöhe 195 m, 5 mal 195 = 975 m = die gesuchte Flughöhe.

Das Verfahren nach aa) und bb) ist auch für die obere Winkelgruppe brauchbar, der negativen Differenz der Erhöhungen, die sich dabei ergibt, entspricht ein für Ziele über der Abgangsebene gültiger Libellenwert unter 300. Bei der Rechnung nach bb), also bei Überschreiten der Libellentafel, kann sich aber in der oberen Winkelgruppe die Auf- bzw. Abrundung der Libellenwerte besonders stark als Ursache von Ungenauigkeiten auswirken.

2. Ohne Libellentafel, durch Schwenken der Flugbahn (nur bei flachen Flugbahnen!)

Steht eine Erhöhungstafel, aber keine Libellentafel zur Verfügung, so kann man Flughöhen in vielen Fällen nach dem Prinzip des „Schwenkens der Flugbahn“ (s. S. 23) abschätzen; s. Bild 21. Das Verfahren ist nur bei verhältnismäßig flachen Bahnen (nicht gegen Ende des Schußweitenbereiches wie in den Beispielen zu 1; auf S. 24 wird nochmals hingewiesen!) brauchbar. Wichtig ist, daß die Werte, die man danach für die Flughöhe erhält, im allgemeinen etwas zu groß sind (Begründung folgt leicht aus dem auf S. 24 ff. über das Schwenken der Flugbahn Gesagten).

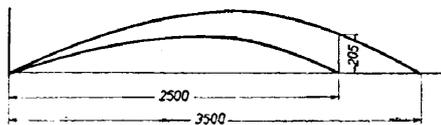


Bild 21: Zum Ermitteln von Flughöhen durch Schwenken der Flugbahn.

Beispiel: (Lehrschußtafel) 4. Ldg., $X = 3500$ m, die Flughöhe bei 2500 m soll ohne Benutzung der Libellentafel angenähert ermittelt werden. Die Schußweite 2500 m würde mit einer Erhöhung von 155[—] erreicht. Die tatsächlich eingestellte Erhöhung von 237[—] (entsprechend 3500 m) ist um 82[—] größer. Diese 82[—] verlegen auf 2500 m, um $82 \cdot 2,5 = 205$ m. Von diesem Wert weiß man, da die Flugbahn immerhin nicht mehr sehr flach ist, daß er etwas zu groß sein dürfte. Man wird ihn also nach Möglichkeit irgendwie nachprüfen. Das kann z. B. so geschehen (s. auch Abschnitt III, g): Der

Gipfelpunkt hat die ungefähren Koordinaten $x \approx 1900$ m (s. Abschnitt III, d), $y_a \approx 231$ m (Gl. 24), die Gipfelgeschwindigkeit beträgt etwa 258 m/s (Gl. 30). Der Punkt der Flugbahn, dessen Flughöhe gesucht ist, liegt etwa 600 m hinter dem Gipfel, er wird also vom Geschöß rund 2,5 s später erreicht als dieser. In dieser Zeit ist das Geschöß aber von der waagerechten Gipfeltangente um $v_0 \cdot t = 9,81 \cdot 2,5^2 \approx 31$ m gefallen, womit sich der ungefähre Wert der Flughöhe von 200 m bestätigt. Kontrollen solcher Art, wobei die angewendeten Verfahren voneinander unabhängig sein sollen, empfehlen sich grundsätzlich!

Die Nachprüfung mit der Libellentafel nach 1 bb) ergibt $\frac{82 \cdot 190}{79} = 197$ m.

Dieser Wert ist, da der Bereich der Libellentafel kaum überschritten wird, verhältnismäßig genau.

3. Durch Rechnung mittels einer angenäherten Flugbahngleichung.

Die nachstehende Näherungsformel gestattet es, wenn der Fallwinkel bekannt ist, die Flughöhe y zu einer beliebigen Entfernung x mit recht guter Näherung zu ermitteln:

$$(31) \quad y \approx \frac{x}{X} (X - x) \cdot \tan \left[\varphi + \frac{x}{X} (\omega - \varphi) \right]$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für den absteigenden Ast, sondern für die ganze Flugbahn, sie wird deshalb eingehend unter Nr. V, b; S. 69, behandelt.

Eine einfachere Näherung für den letzten Teil des absteigenden Astes erhält man, indem man in diesem Bereich die Flugbahn durch diejenige Parabel ersetzt, die mit der wahren Flugbahn die Schußweite und den Fallwinkel gemeinsam hat (s. Bild 20, S. 55, Parabel F_2). Ihre Gleichung lautet:

$$(32) \quad y \approx \frac{x}{X} (X - x) \cdot \tan \omega$$

(s. Herleitung der Gl. 13a, S. 15; φ ist sinngemäß durch ω ersetzt. Man kann sich die Gleichung auch aus Gl. 31 entstanden denken, da in dem hier betrachteten Bereich der Winkel, dessen Tangens in die Rechnung eingeht, sich nur sehr wenig von ω unterscheidet).

Da die hier gewählte Ersatzparabel (F_2 , Bild 20) ganz oberhalb der wahren Flugbahn, mit der sie die Endtangente gemeinsam hat, verläuft, liefert sie etwas zu große Werte für die Flughöhe. Die Näherung ist aber um so besser: 1. je parabelähnlicher die Flugbahn, d. h. je größer das Kaliber und je kleiner die v_0 ist, 2. je näher dem Fallpunkt der betrachtete Flugbahnpunkt liegt. Es ist nicht, wie bei der Anwendung des Schwenkens der Flugbahn nach Abschnitt 2 erforderlich, daß die Flugbahn flach ist.

Beispiel: Fragestellung und Werte wie im Beispiel zu Abschnitt a, 1, S. 58; Fallwinkel zur Kartenentfernung 4700 m = 736'.

$$y \approx \frac{4500}{4700} \cdot 200 \cdot 0,882 = 169 \text{ m.}$$

Die genauere Rechnung nach Gl. 31 ergibt 167 m. Beide Werte stimmen recht gut mit dem in Abschnitt I gefundenen Werte (168 m) überein.

Liegt der Punkt, für den die Flughöhe gesucht ist, sehr nahe dem Fallpunkt, so geht Gl. 32 über in die Gleichung:

(32a)

$$y \approx (X - x) \cdot \tan \omega$$

d. h., man kann dann praktisch das letzte Stück der Flugbahn durch die Tangente im Fallpunkt ersetzen.

4. Zeichnerische Möglichkeiten.

Selbstverständlich kann man auch aus zeichnerischen Darstellungen — sei es der ganzen Flugbahn nach Abschnitt V, e., S. 70, sei es des absteigenden Astes nach Abschnitt IV, d, S. 65 — Flughöhen bestimmen.

b) Bestimmung von x bei gegebenem X und y .

Es handelt sich hierbei um die Frage: Wie weit vor dem gegebenen Fallpunkt hat eine bestimmte Flugbahn die Flughöhe y ? Diese Fragestellung kann in verschiedener Form auftauchen, z. B.: Wie groß ist die bestrichene Entfernung zu einer gegebenen Höhenausdehnung des Ziels, oder: Wie weit (in der Abgangsebene gemessen) muß eine Zieldeckung von gegebener Höhe y mindestens vom Fallpunkt entfernt sein, damit die Flugbahn noch über sie hinwegführt? Gesucht ist in jedem dieser Fälle bei bekanntem X und y das Stück $X - x$, bzw. x (s. Bild 22).

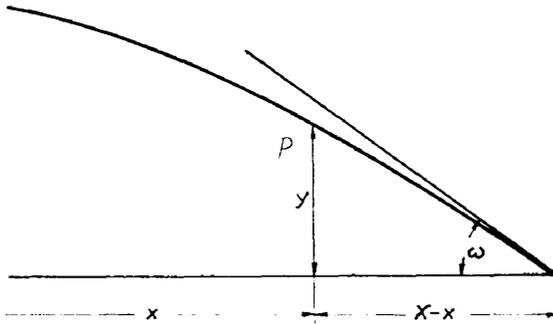


Bild 22: Zur Ermittlung der Flugweite x eines Flugbahnpunktes bei gegebener Flughöhe y .

Selbstverständlich läßt sich die Lösung dieser Aufgabe dem Flugbahnbild, der graphischen Schußtafel oder auch jeder anderen zeichnerischen Darstellung der Flugbahn (s. auch IV, d, S. 65) entnehmen. Rechnerisch erhält man $X - x$ auf einfache Weise aus der nachstehenden Gl. 33 oder aus der ihr gleichwertigen Gl. 33a:

(33)

$$X - x \approx y \left(1 + \frac{3}{2} \cdot y \cdot \frac{\cot \omega}{X} \right) \cdot \cot \omega$$

(Kraussche Formel),

oder:

(33a)

$$X - x \approx y \left(1 + \frac{y}{3 y_g} \right) \cdot \cot \omega$$

(Formel von Dufresnois).

Beide Gleichungen setzen nicht die Kenntnis der Endgeschwindigkeit voraus; in bezug auf $X - x$ sind sie vom ersten Grade, also zur Bestimmung dieser Größe rechnerisch praktisch. Die Gl. 33a wird vor allem dann mit Vorteil verwendet, wenn y_g nicht erst über T angenähert berechnet werden muß, sondern unmittelbar aus Schußtafelangaben zur Verfügung steht.

* Zur Herleitung: Man erhält die Gl. 33, indem man Gl. 32 (S. 63) nach x auflöst und damit $X - x$ bildet, es ergibt sich:

$$X - x \approx \frac{X}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4y}{X \cdot \tan \omega}} \right)$$

Die Wurzel in diesem Ausdruck wird in eine Reihe entwickelt und diese Reihe nach dem 3. Glied abgebrochen, das gibt nach einfacher Umformung:

$$X - x \approx y \cdot \cot \omega \left(1 + y \cdot \frac{\cot \omega}{X} \right)$$

Dieser Wert für $X - x$ ist aus verschiedenen Gründen etwas zu klein: Die wahre Flugbahn verläuft unterhalb der „Ersatzflugbahn“ der Gl. 32; außerdem würde der Klammerausdruck größer, wenn weitere Glieder der binomischen Reihe mit verrechnet würden. Man setzt deshalb zum zweiten Summanden in der Klammer einen Korrekturfaktor K (K muß natürlich > 1 sein) und bestimmt den Zahlenwert von K durch Vergleich mit zahlreichen, genau durchgerechneten Bahnen und Mittelung zu $K \approx 3/2$. Man kommt von Gl. 33, die hiermit hergeleitet ist, zu Gl. 33a, indem man noch setzt:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\cot \omega}{X} \approx \frac{1}{3 y_g}$$

(Das ist gleichbedeutend mit: $y_g \approx \frac{1}{4,5} \cdot X \cdot \tan \omega$, s. rechte Seite der Gl. 25, S. 55. Diese letztere

Näherung ist zwar nicht sehr genau, eine Ungenauigkeit des zweiten Summanden in der Klammer, die zu der viel größeren Eins addiert wird, wirkt sich aber auf das Ergebnis kaum aus, s. Zahlenbeispiel.

Die mit Gl. 33 oder 33a erreichte Näherung ist um so besser, je kleiner y im Verhältnis zu y_g ist; praktisch ist sie vollauf genügend, solange y unter einem Drittel der Gipfelhöhe liegt.

Ist y sehr klein, d. h. im letzten Teil des absteigenden Astes, so kann man in erster Näherung den zweiten Summanden in der Klammer gegenüber der Eins vernachlässigen. Das bedeutet, daß man das letzte Stück der Flugbahn durch die Tangente im Fallpunkt ersetzt. Man erhält so die mit der Gl. 32a identische Gleichung:

(33b)

$$X - x \approx y \cdot \cot \omega.$$

1. Beispiel: Zu Gl. 33 (Lehrschußtafel), 3. Ldg. Wie weit vor dem Fallpunkt hat die Flugbahn mit $X = 4700$ m die Flughöhe $y = 168$ m? $\omega = 736^\circ$. (Das Beispiel ist die Umkehrung des Beispiels zu IV, a, 1, S. 58).

$$X - x = 168 \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{168}{0,882 \cdot 4700} \right) \cdot \frac{1}{0,882} = 168 \cdot 1,0608 \cdot \frac{1}{0,882} = \underline{\underline{202 \text{ m}}}$$

Gl. 33a, mit $T = 27,6$ s, liefert:

$$X - x = 168 \left(1 + \frac{168}{3 \cdot 1,25 \cdot 27,6^2} \right) \cdot \frac{1}{0,882} = \underline{\underline{202 \text{ m}}} \text{ (wahrer Wert: } 200 \text{ m).}$$

Die Flugbahn liegt also bei $4700 - 202 \approx 4500$ m in der angegebenen Höhe 168 m. (Dieses Ergebnis ist praktisch genau, s. S. 58.)

2. Beispiel: (Lehrschußtafel.) Wie groß ist die bestrichene Entfernung beim Schießen auf einen Panzer von der Höhe 2 m, 5. Ldg., auf 1000 m? $\omega = 48^\circ$.

aa) In erster, grober Näherung nach Gl. 33b:

$$X - x \approx 2 \cot \omega - \frac{2}{0,047} = \underline{\underline{42,5 \text{ m.}}}$$

bb) Genauere Berechnung nach Gl. 33:

$$X - x \approx 2 \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{0,047 \cdot 1000} \right) \cdot \frac{1}{0,047} = \underline{\underline{45,2 \text{ m.}}}$$

cc) Gleichwertige Berechnung nach Gl. 33a, $T = 2,9 \text{ s}$:

$$X - x \approx 2 \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3 \cdot 1,25 \cdot 2,9^2} \right) \cdot \frac{1}{0,047} = \underline{\underline{45,2 \text{ m.}}}$$

C. Bestimmung von X bei gegebenem x und y .

Die Fragestellung ist derjenigen, die im vorangehenden Abschnitt behandelt wurde, verwandt. Gegeben sind aber in diesem, hier behandelten Falle, die Koordinaten des Flugbahnpunktes P (x und y), gesucht ist die Lage des Fallpunktes derjenigen Flugbahn (von bestimmter v_0), die durch den Punkt P hindurchführt (s. Bild 22, S. 61). Dieselbe Fragestellung kann auch in den Formen auftauchen:

Wie weit – gemessen in diesem Falle in der Abgangsebene – erstreckt sich der gedeckte Raum hinter einer Zieldeckung? Oder: Welches ist die kürzeste schußtafelmäßige Schußweite, mit der eine Deckung im Bereich des absteigenden Astes überschossen werden kann? Oder: Ein eingemessener Sprengpunkt hat die Koordinaten x und y . Wo liegt der zugehörige Fallpunkt?

Gesucht ist hier also X bzw. $X - x$, bei gegebenem x und y (im Gegensatz zum vorangehenden Abschnitt, in dem X festlag und x gesucht war).

Die Aufgabe kann je nach den verfügbaren Hilfsmitteln auf verschiedene Weise gelöst werden (auf die selbstverständliche Lösung mittels Flugbahnbildes o. ä. wird hier nicht eingegangen).

1. Mit der Libellentafel.

Steht eine Schußtafel mit Libellentafel zur Verfügung, so kann man aus ihren Angaben die Schußweite in der Abgangsebene ermitteln, wenn die Koordinaten eines Flugbahnpunktes im Bereich der Libellentafel gegeben sind. Der Rechengang ist dabei einfach die Umkehrung des unter Nr. IV, 1, S. 58 angegebenen. Auch für die Genauigkeit des Verfahrens gilt das dort Gesagte: Das Ergebnis ist, solange der Bereich der Libellentafel nicht überschritten wird, genau, abgesehen von kleinen Fehlern, die durch Zwischenschalten (Interpolieren) und durch die Auf- bzw. Abrundung der Tafelwerte zustandekommen können.

Beispiel: (Lehrschußtafel) 5. Ldg. Wo schneidet eine Flugbahn, die auf 6800 m 165 m hoch liegt, die Abgangsebene? Aus der Libellentafel erhält man für die Ziellhöhe 165 m auf der Entfernung 6800 m den runden Wert Libelle 334. Nach der Kommandotafel ist die Erhöhung für 6800 m 472 ′. Hinzuzählen der 34 Libellenteile ergibt 506 ′; Schußweite hierzu = **7030 m**.

2. Ohne Libellentafel, durch Schwenken der Flugbahn (nur bei flachen Flugbahnen!)

Steht keine Libellentafel, wohl aber eine Erhöhungstafel zur Verfügung, so kann man die Schußweite X durch „Schwenken der Flugbahn“ (s. S. 22) angenähert ermitteln. Das Verfahren ist zwar sehr einfach, es führt aber nur bei flachen Flugbahnen zu brauchbaren Näherungswerten. (Begründung s. S. 23ff.) Der Rechengang verläuft gerade umgekehrt wie der des Verfahrens nach Abschnitt IV, a, 2, S. 59. Er wird am schnellsten klar am

Beispiel: (Lehrschußtafel), Umkehrung des Beispiels zu IV, a, 2. Wo schneidet die Flugbahn der 4. Ldg., die auf 2500 m die Flughöhe 205 hat, die Abgangsebene? (S. Bild 21, S. 59.) Ausgegangen wird von der Flugbahn mit der Schußweite 2500 m, ihre Er-

höhung ist 155". Um wieviel Strich müßte man diese Flugbahn nach oben schwenken, um den Punkt mit $x = 2500$ m in die Höhe 205 m zu verlegen? Man findet nach der Strichregel: $\frac{205}{2,5} = 82$ ". Die Erhöhung der neuen Flugbahn, die durch den Punkt $x = 2500$ m, $y = 205$ m hindurchführt, ist also $155" + 82" = 237$ ". Als Schußweite für 237" findet man in der Kommandotafel: $X = \underline{\underline{3500 \text{ m.}}}$

3. Ohne Libellentafel, durch Rechnung mittels einer angenäherten Flugbahngleichung. (Ermitteln der Gesamterhöhung für ein Ziel außerhalb der Abgangsebene).

Ist die Flugbahn nicht ausgesprochen flach (schwenkbar) und steht keine Libellentafel zur Verfügung, so sind die Verfahren nach 1) und 2) nicht anwendbar. Man kann aber, sofern nur eine Kommandotafel vorhanden ist, die Größe $(X - x)$ auch in diesem Falle nach Gl. 33 oder Gl. 33a berechnen. Zwar kennt man weder für X noch für ω die genauen einzusetzenden Werte, es genügt aber, wenn man diese beiden Stücke (bzw. für die Gl. 33a die Größe T) für diejenige Flugbahn ermittelt, deren Erhöhung sich — in der unteren Winkelgruppe! — durch „Schwenken der Flugbahn“ (Hinzuzählen des Geländewinkels des Punktes P zu derjenigen Erhöhung, die die Schußtafel zur Kartenentfernung dieses Punktes angibt) ermittelt.

Beispiel: (Lehrschußtafel). Der oberste Punkt einer Zieldeckung auf 5000 m Kartenentfernung liegt 200 m höher als das Geschütz. Gesucht die Lage des Fallpunkts derjenigen Flugbahn, die über die Deckung hinwegführt, in der 5. Ldg. Durch Schwenken der Flugbahn findet man als ersten, groben Wert der Gesamterhöhung: 319" (= 279 + 40" Geländewinkel) und hierzu die vorläufigen Werte: $\omega = 427$ ", $X = 5450$ m. Die Gl. 33 lautet nunmehr:

$$X - x = 200 \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{200}{0,446 \cdot 5450} \right) \cdot \frac{1}{0,446} = 200 \cdot 1,123 \cdot \frac{1}{0,446} = 504 \text{ m.}$$

Daraus ergibt sich X zu: $5000 + 504 = 5504$ m. Dieser Wert ist, wie die Nachprüfung mittels der Libellentafel ergibt, praktisch genau. [Zu dem angegebenen Rechengang ist noch folgendes zu bemerken: Der Wert, der sich aus der Rechnung für X ergibt (5504 m), ist in unserem Falle nicht sehr verschieden von dem ersten Näherungswert (5450 m), der zusammen mit seinem Fallwinkel in die Rechnung einging. Sollte, was bei großem y oder gegen Ende des Schußweitenbereichs eintreten kann, das ermittelte X vom ersten Näherungswert erheblich verschieden ausfallen, so ist die Rechnung mit dem gefundenen X und dem dazugehörigen ω zu wiederholen.]

Selbstverständlich löst die obige Rechnung auch die Aufgabe, bei fehlender Libellentafel die Gesamterhöhung für ein Ziel außerhalb der Abgangsebene zu ermitteln; man braucht zum Schluß nur die dem gefundenen X zugehörige Erhöhung der Kommandotafel zu entnehmen.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf die obere Winkelgruppe darf man natürlich die vorläufigen Werte für X und ω , die in die Rechnung eingehen, nicht durch Schwenken der Flugbahn ermitteln, da hier ein Vergrößern der Erhöhung die Flugbahn in ihrem letzten Teil nicht hebt, sondern senkt (s. Bild 7, S. 25). Man schätzt vielmehr X ab und rechnet mit diesem geschätzten X und dem zugehörigen ω .

Das beschriebene Verfahren liefert übrigens in der oberen Winkelgruppe die Größe $(X - x)$ noch genauer als bei gleichem y und x und gleicher Ladung in der unteren Winkelgruppe, da das letzte Stück der Flugbahn zwischen dem gegebenen Flugbahnpunkt und dem Fallpunkt kürzer ist als dort; aus demselben Grund braucht die Schätzung von X nicht besonders genau zu sein, da X doch nur in den Nenner des ohnehin kleinen Korrekturgliedes in der Klammer eingeht.

Ist y nicht zu groß, so kann man in der oberen Winkelgruppe aus dem gleichen Grunde die Rechnung häufig noch vereinfachen, indem man das letzte Flugbahnstück als Gerade betrachtet (s. Gl. 33b und Vorbemerkungen dazu).

Bei beobachtetem Schießen im Gebirge kann man, um die Feuereröffnung zu beschleunigen, die Vereinfachung noch weiter treiben und für $\cot \omega$ den runden Wert $1/2$ annehmen. Man erhält damit die bekannte Faustregel: Die halbe Höhe des Ziels über der Abgangsebene wird zur Kartentfernung des Ziels hinzugezählt und zu dieser Summe die Gesamterhöhung der Kommandotafel entnommen.

d) Zeichnerische Darstellung des letzten Teils der Flugbahn.

Man erhält schnell ein angenähertes Bild des Flugbahnendes, indem man diesen Teil der Flugbahn durch diejenige Parabel ersetzt, die entstehen würde, wenn das Geschöß seine Bahn ohne Luftwiderstand in umgekehrter Richtung (also vom Fallpunkt ausgehend) zurücklegen würde. Der Fallwinkel wird dabei zum Abgangswinkel, die Endgeschwindigkeit zur Anfangsgeschwindigkeit. Die Zeichnung wird dem Bild 23 entsprechend angefertigt:

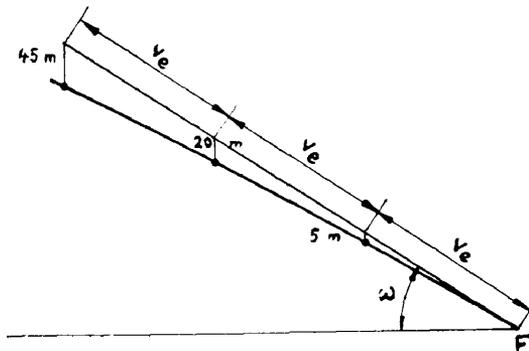


Bild 23: Zeichnung eines Flugbahnendbildes.

Durch Antragen des Fallwinkels im Fallpunkt gewinnt man die Endtangente; die als gleichbleibend angenommene Endgeschwindigkeit wird an dieser 2- bis 4mal angetragen und die Fallstrecken ($s = 1/2 \cdot g \cdot t^2$) für 1, 2, 3, 4 s (u. U. auch für Zwischenzeiten) an den entsprechenden Punkten senkrecht nach unten eingezeichnet. Die Flugbahn wird danach mit dem Kurvenlineal oder freihändig gezeichnet oder durch einen Geradenzug ersetzt.

Diese Näherung ist besser als die entsprechende im aufsteigenden Ast. Der Grund dafür liegt darin, daß die Endgeschwindigkeit über einen größeren Bereich annähernd gleich bleibt als die Anfangsgeschwindigkeit, da im absteigenden Ast bei der wirklichen Bewegungsrichtung des Geschosses die Einflüsse des Luftwiderstandes und der Erdanziehung auf die Geschößgeschwindigkeit sich teilweise aufheben.

Die Gleichung dieser Kurve würde natürlich der Gl. 3 (S. 13) entsprechen, mit $(X \rightarrow x)$ anstatt x , v_e anstatt v_0 und ω an Stelle von φ . Sie ist aber weder zur Bestimmung der Flughöhe y noch der Auftreffweite $(X \rightarrow x)$ besonders rechenhandlich.

e) Flugzeit bis zu einem Punkt des absteigenden Astes.

Für die Zeit t , die das Geschöß im luftleeren Raum braucht, um einen Punkt mit den Koordinaten x und y zu erreichen, wurde auf S. 18 die Gleichung 17 hergeleitet:

$$t = T \left(1 - \frac{y}{x} \cdot \cot \varphi \right)$$

Diese Gleichung gilt, mit einem Korrekturfaktor für das zweite Glied in der Klammer, auch als sehr gute Näherung für den luftgefüllten Raum. Für den ganzen absteigenden Ast, vom Gipfel an, ist 0,9 ein brauchbarer Mittelwert für diesen Faktor; es gilt also:

$$(35) \quad t \approx T \left(1 - 0,9 \frac{y}{x} \cdot \cot \varphi. \right)$$

[Tatsächlich läßt sich eine für alle Flugbahnpunkte und Verhältnisse gültige konstante Korrekturgröße nicht genau angeben. Der Faktor nähert sich vielmehr für solche Flugbahnen, die wenig durch den Luftwiderstand verformt sind — selbstverständlich —, dem Wert 1; ist die Flugbahn sehr parabelunähnlich (große v_0 , kleine Querschnittsbelastung), so kann er bis auf 0,8 sinken.]

Beispiel: Wie groß ist bei der Musterflugbahn Nr. VIII (S. 51) die Flugzeit bis zum Punkt $x = 10\,521$ m, $y = 2198$ m?

$$t = 51,18 \left(1 - 0,9 \frac{2198}{10\,521} \cdot 1,192 \right) = 51,18 (1 - 0,2243) = \underline{39,75 \text{ s.}}$$

Das bedeutet gegenüber dem wahren Wert von 39,50 s einen Fehler von nur 0,25 s oder 0,6%.

f) Angenäherte Ermittlung des Fallwinkels.

1. Faustformel zur rohen Abschätzung.

$$(36) \quad \omega \approx a \cdot \varphi$$

In den Schußtafeln ist vielfach eine Faustformel angegeben, die den Fallwinkel als Produkt der Erhöhung und eines für das betreffende Geschütz gleichbleibenden Faktors angibt. Dieser Faktor hat zwar für ein- und dieselbe Waffe einen einigermaßen festen Wert, kann aber von Geschütz zu Geschütz zwischen 1,1 und 2 schwanken. Die Formel ist nur zur groben Abschätzung geeignet. Es empfiehlt sich jedoch für den Artilleristen, sich die Größe des Faktors a für diejenigen Geschütze, mit denen er zu tun hat, einzuprägen. Für leichte und schwere Feldhaubitzen ist $a = 1,2$ ein im allgemeinen brauchbarer Wert.

2. Genauere Formel für ω .

Auf S. 73, Nr. V, d, wird für den Fallwinkel der Näherungsausdruck hergeleitet:

$$\cot \omega = \frac{X}{2 y_g} - \cot \varphi.$$

Ersetzt man hierin y_g durch $\frac{g}{8} T^2$ (s. Gl. 10, S. 15, und Gl. 24, S. 54), so erhält man:

$$(37) \quad \cot \omega = \frac{X}{2,44 T^2} - \cot \varphi.$$

[Hier ist $\frac{g}{8}$ als 1,22 eingesetzt; man erhält damit den Fallwinkel im allgemeinen genauer als mit dem Wert 1,25, während dieser letztere Zahlenwert dann etwas vorteilhafter ist, wenn es sich darum handelt, die Gipfelhöhe selbst zu ermitteln.]

Bei der Berechnung von ω nach Gl. 37 sind Fehler bis zu 5% möglich, meist bleiben sie, besonders bei flachen Flugbahnen, in der Größenordnung von $\pm 1\%$.

Beispiel: Der Fallwinkel der Musterbahn Nr. VI (S. 48) soll aus der Erhöhung, der Endflugzeit und der Schußweite angenähert ermittelt werden.

$$\cot \omega = \frac{10\,704}{2,44 \cdot 47,21^2} = 1,1918 = 1,9683 - 1,1918 = 0,7765$$

$$\omega = 52^\circ 10' \text{ (genauer Wert: } 51^\circ 51', \text{ also } 0^\circ 19' \text{ Fehler).}$$

g) Abschätzung der Endgeschwindigkeit.

Für die Endgeschwindigkeit läßt sich eine obere Grenze angeben:

(38)

$$v_e < \frac{g \cdot T}{2 \cdot \sin \omega}$$

Der senkrechte Anteil der Endgeschwindigkeit ($v_e \cdot \sin \omega$) kommt lediglich durch die Wirkung der Erdanziehung zustande. Nimmt man an, er werde nicht durch den Luftwiderstand abgebremst, so ist er ebenso groß wie die Geschwindigkeit, mit der ein aus der Gipfelhöhe $\left(\frac{g}{8} T^2\right)$ frei fallender Körper die Abgangsebene erreicht. Allgemein ist bei der Fallhöhe h die Endgeschwindigkeit $v_y = \sqrt{2 g h}$ (Fallgesetz), bei $h = \frac{g}{8} T^2$ also: $v_y = (v_e \cdot \sin \omega) = \frac{g \cdot T}{2}$. Der hieraus erhaltene Wert für v_e ist, des Luftwiderstandes wegen, dem wahren Wert gegenüber zu groß. Die Abweichung erreicht bei Flugzeiten bis 30 s etwa 5%, bei Flugzeiten bis 60 s etwa 10% des wahren Wertes. Beispiel: (Lehrschußtafel) 4. Ldg., $X = 5000$ m, $T = 22$ s, $\omega = 508'$. Die rechte Seite von Gl. 38 ergibt 226 m/s, die wahre Endgeschwindigkeit ist 216 m/s. Der Fehler beträgt + 4,6%.

V. Verfahren, die die ganze Flugbahn betreffen oder sich auf beliebige Flugbahnpunkte beziehen.

a) Ermittlung der Erhöhung für eine gegebene Schußweite, wenn lediglich die Höchstschußweite bekannt ist.

(Aufstellung einer behelfsmäßigen Erhöhungstafel.)

(39)

$$\sin 2 \varphi \approx \frac{X}{X_{\max}}$$

Das Verhältnis zwischen der Schußweite, die mit einer beliebigen Erhöhung φ erreicht wird, und der Höchstschußweite ist also praktisch unabhängig von der v_0 . Der obige Ausdruck ist streng für den luftleeren Raum abgeleitet (Gl. 12) und behält als Aussage über ein Verhältnis auch im luftgefüllten Raum eine gewisse Gültigkeit. Er kann im Notfall dazu dienen, bei Fehlen einer Schußtafel eine Erhöhung abzuschätzen, doch werden in der unteren Winkelgruppe die so gewonnenen Werte von φ meist etwas zu groß. Vorteilhafter und leichter ist die Verwendung der graphischen Darstellung (Bild 25). Sie zeigt im Prinzip die Sinuskurve nach Gl. 39, jedoch gleich mit gewissen Durchschnittsverbesserungen für den luftgefüllten Raum, in der unteren Winkelgruppe für zwei Hauptkaliber.

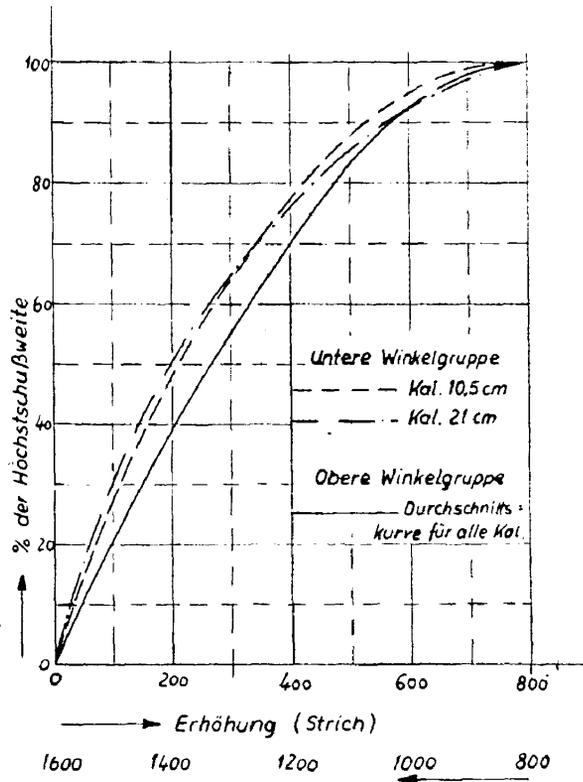


Bild 25: Die Schußweite (in Prozenten der Höchstschußweite) in Abhängigkeit von der Erhöhung.

Am Kurvenverlauf läßt sich unmittelbar ablesen, daß der Einfluß einer Erhöhungsänderung auf die Schußweite immer kleiner wird, je mehr man sich der Höchstschußweite (in der unteren wie in der oberen Winkelgruppe) nähert.

Weiterhin merkt man sich leicht, daß die Schußweite bei 200, also bei etwa einem Viertel der zur Höchstschußweite gehörenden Erhöhung, annähernd gleich der halben Höchstschußweite ist.

1. Beispiel, gesucht die Schußweite: (Lehrschußtafel) 3. Ldg., Höchstschußweite 4950 m. Wie groß ist die Schußweite bei 300' ? Die Kurve gibt bei 300' für das Kaliber 10,5 cm 64% der Höchstschußweite an. Das sind 3170 m. Der genaue Wert, den die Kommandotafel liefert, ist 3125 m.

Auch wenn nicht die Höchstschußweite, sondern irgendeine beliebige Schußweite und die zugehörige Erhöhung bekannt sind, läßt sich zu einer anderen gegebenen Schußweite die Erhöhung (oder umgekehrt) ermitteln.

2. Beispiel: gesucht die Erhöhung (obere Winkelgruppe). Ein Werfer erreicht mit der Erhöhung 1350' die Schußweite 700 m. Welche Erhöhung ist für eine Schußweite von 1430 m erforderlich? 700 m sind, da sie mit $\varphi = 1350'$ erreicht werden, 47% der Höchstschußweite. 1430 m stellen $y\%$ der Höchstschußweite dar; y ergibt sich aus der Verhältnisgleichung:

$$\frac{y}{1430} = \frac{47}{700} \text{ zu } 96\%.$$

Hierzu liefert die Kurve die Erhöhung 950[—].

Soll — etwa für ein Beutegeschütz — schnell eine rohe Erhöhungstafel aufgestellt werden, so errechnet man zweckmäßigerweise auf Grund der ausgemessenen Schußentfernung einer Reihe 8 bis 12 zusammengehörige Wertepaare von Schußweite und Erhöhung und trägt die Schußweite in Abhängigkeit von der Erhöhung in einem Gitternetz auf. Die Punkte, die sich so ergeben, verbindet man durch eine glatte Kurve, der man dann die Zwischenwerte für eine behelfsmäßige Kommandotafel leicht entnimmt. Die Genauigkeit genügt in der Regel für beobachtetes Schießen durchaus; das Wertepaar von Schußweite und Erhöhung, das der Rechnung zugrunde liegt, muß jedoch bei einem genügend großen Bruchteil der Höchstschußweite (mindestens $\frac{2}{3}$, besser noch etwa $\frac{1}{4}$ der Höchstschußweite liegen).

b) Ermittlung der Flughöhe eines beliebigen Flugbahnpunktes.

Die nachstehende Formel, die schon auf S. 60 als Gl. 31 aufgeführt ist, gestattet es, bei bekanntem Fallwinkel, die Flughöhe eines beliebigen Flugbahnpunktes mit recht guter Annäherung zu bestimmen. Sie ist, da sie auf verhältnismäßig einfache Weise eine in der Praxis besonders häufig auftretende Frage beantwortet, wohl die wichtigste unter den Näherungsformeln der angewandten Ballistik:

$$(31) \quad y \approx \frac{x}{X} (X - x) \cdot \tan \left(\varphi + \frac{x}{X} [\omega - \varphi] \right)$$

Diese Gleichung hat eine äußere Ähnlichkeit mit der Flugbahngleichung des luftleeren Raumes in der Form der Gl. 13a von S. 15; dort ist jedoch für die ganze Flugbahn der feste Wert $\tan \varphi$ einzusetzen, während hier an die Stelle von φ ein mit der Flugbahnabszisse x veränderlicher Winkel tritt, der bei $x = 0$ der Wert φ hat, mit wachsendem x ansteigt und schließlich bei $x = X$ gleich ω wird.

Die (transzendente) Kurve, die hierbei an Stelle der Flugbahn tritt, schneidet wie diese die Abgangsebene unter den Winkeln φ und ω . Ebenso wie die wahre Flugbahn hat sie einen Gipfelpunkt, der näher dem Fallpunkt als der Mündung liegt, und bei einem endlichen x eine senkrechte Asymptote. Soweit die Kurve über der Abgangsebene verläuft, ist die Annäherung an die wirkliche Flugbahn recht gut (in den meisten Fällen erheblich besser als die Annäherung durch einen Kegelschnitt), die Werte für y , die sich nach Gl. 31 ergeben, sind zwar im allgemeinen etwas zu klein, doch ist der Fehler in der Regel unbedeutend. Er kann bei Feldgeschützen 2% des wahren Wertes erreichen, meist ist er erheblich kleiner. Auch die negativen Flughöhen, die man unter der Abgangsebene erhält, sind dem Betrage nach in der Regel etwas zu klein, die Annäherung ist in diesem Bereich nicht ganz so gut wie oberhalb der Abgangsebene.

1. Beispiel: Die Werte für den Gipfelpunkt, die der Nachprüfung des Beispiels zu Abschnitt IV, a, 2 (S. 60) zugrunde liegen, sind: $x = 1900$ m, $y \approx 231$ m. Es ist festzustellen, welche Flughöhe sich nach Gl. 31 zu $x = 1900$ m ergibt? $\varphi = 237^{\circ} + 4^{\circ} = 241^{\circ}$, $\omega = 283^{\circ}$, $X = 3500$ m, $x = 1900$ m.

$$\begin{aligned} y &\approx \frac{1900}{3500} \cdot 1600 \cdot \tan \left(241^{\circ} + \frac{1900}{3500} \cdot 42^{\circ} \right) \\ &= \frac{19}{35} \cdot 1600 \cdot \tan 264^{\circ} = \underline{\underline{230 \text{ m}}} \end{aligned}$$

2. Beispiel: (Anwendung auf das Gebiet unter der Abgangsebene; Lehrschußtafel) 5. Ldg., wie tief unter der Abgangsebene liegt auf 6500 m die Flugbahn mit der schußtafel-

mäßigen Schußweite 6050 m? $\varphi = 379' + 4' = 383'$, $\omega = 508'$, $\omega - \varphi = 125'$.

$$y \approx \frac{65}{60,5} \cdot (-450) \cdot \tan\left(383' + \frac{65}{60,5} \cdot 125'\right) = -\underline{269 \text{ m}}$$

Der genaue Wert, den man mit Hilfe der Libellentafel bestimmt (Libelle 247 bei 6500), ist: -270 m .

3. Beispiel: Für die Musterflugbahn Nr. VIII (S. 51) ist die Flughöhe bei $x = 10521 \text{ m}$ gesucht. $X = 12952 \text{ m}$, $\omega = 49^\circ 59'$

$$\begin{aligned} y &= \frac{10521}{12952} (12952 - 10521) \cdot \tan\left(40^\circ + \frac{10521}{12952} \cdot [9^\circ 59']\right) \\ &= \frac{10521}{12952} \cdot 2431 \cdot \tan 48^\circ 7' = \underline{2200 \text{ m}}. \end{aligned}$$

Der genaue Wert ist 2198 m.

c) Angenäherte zeichnerische Darstellung der Flugbahn.

Mit einfachen Mitteln zeichnet man ein Flugbahnbild nach folgendem Verfahren:

aa) Bekannt: φ , X und y_g (bzw. T , s. Gl. 24). Zeichnung nach Bild 26.

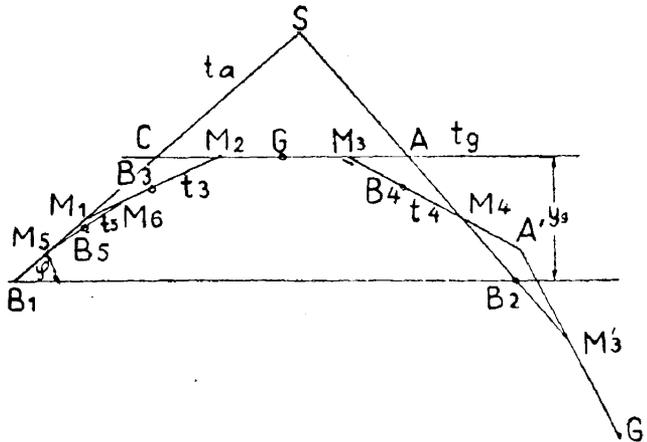


Bild 26: Zur Aufrißzeichnung der Flugbahn.

Trage den Abgangswinkel φ (Erhöhung + Abgangsfehler) in B_1 an. Der freie Schenkel ist die Anfangstangente t_a . Zeichne im Abstand $1,25 T^2$ eine Gleichlaufende zur Abgangsebene (Gipfel-tangente, t_g). Sie schneidet t_a in C. Trage $B_1 - C$ nochmals auf t_a ab, so daß $B_1 - S = 2(B_1 - C)$. Verbinde S mit dem Fallpunkt B_2 , die Verbindungsgerade schneidet t_g in A. Halbiere A - C durch G (G ist der Gipfel der Flugbahn) und weiter: $B_1 - C$ durch M_1 , C - G durch M_2 , G - A durch M_3 , A - B_2 durch M_4 . Verbinde M_1 und M_2 durch t_3 , M_3 und M_4 durch t_4 . Halbiere $M_1 - M_2$ durch B_3 , $M_3 - M_4$ durch B_4 . Entsprechend weiter: halbiere $B_1 - M_1$ durch M_5 , $M_1 - B_3$ durch M_6 . verbinde M_5 und M_6 durch t_5 , halbiere $M_5 - M_6$ durch B_5 usw. Anlegen der Zeichnung auf kariertem oder besser Millimeterpapier erleichtert bzw. beschleunigt das Zeichnen, da die Teilpunkte M_1 und M_4 in halber, B_3 und B_4 in dreiviertel Gipfelhöhe liegen. Entsprechendes gilt für die weiteren Teilpunkte, M_5 liegt in ein Viertel Gipfelhöhe usw. Die Punkte B_n sind Punkte unserer Näherungsflugbahn, die Geraden t_n sind die Tangenten in diesen Punkten. Die Verfeinerung läßt

sich beliebig weit treiben. Doch dürfte ein Fortführen des Verfahrens bis zu 7 Flugbahnpunkten (außer B_1 und B_2) vollauf genügen. Kommt es nur auf einen Teil der Flugbahn, z. B. den absteigenden Ast an, so wird man die Zeichnung natürlich nur dort weiterführen. Da das Verfahren nicht nur Punkte der Näherungsflugbahn, sondern in diesen Punkten auch die Tangenten liefert, läßt sich die Kurve (Hüllkurve) leicht ausziehen. Bild 27 zeigt eine noch weiter durchgeführte Konstruktion, die Kurve selbst ist, um die Klarheit zu wahren, nicht eingezeichnet.

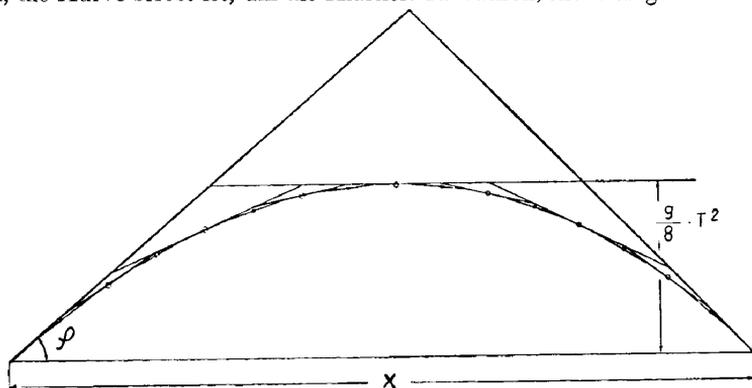


Bild 27: Zeichnung der Flugbahn.

Die Flugbahn wird bei diesem Verfahren durch eine Parabel mit schräger Achse ersetzt; die Konstruktion beruht auf der Parabeleigenschaft: die Verbindungslinie der Mitten zweier Parabeltangenten (die Länge der Tangenten ist gerechnet vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt der beiden Tangenten) ist eine neue Parabeltangente, sie wird selbst durch den Berührungspunkt halbiert. Die vier Bestimmungsstücke, welche die Parabel festlegen, sind hier: die Anfangstangente, ihr Berührungspunkt, die Gipfeltangente (gegeben durch T nach Gl. 24) und der Fallpunkt.

Die Fortführung der Zeichnung unter die Abgangebene ergibt sich sinngemäß aus der Zeichnungsanweisung bzw. der genannten Parabeleigenschaft. Zweckmäßigerweise prägt man sie sich nicht fest ein, sondern leitet sie im Bedarfsfall durch die folgende Überlegung neu her: Man nimmt an (s. Bild 26), der Parabelbogen zwischen den Punkten B_4 und B_2 sowie die beiden Tangentenabschnitte $B_4 - M_4$ und $B_2 - M_4$ seien bekannt. Nun überlegt man, auf welche Weise man, von diesen gegebenen Stücken ausgehend, das „Gerüst“ des Parabelbogens von B_4 bis G , wenn es nicht schon bekannt wäre, gewinnen könnte, d. h., wie auf Grund der Lage der Punkte B_4, M_4, B_2 die der Punkte A, M_3, G bestimmt ist. Das so gewonnene Verfahren wird dann sinngemäß auch nach der anderen Seite, also über den Punkt B_2 hinaus, angewandt. Es ergibt sich: Verdoppeln der Strecke $M_4 - B_4$ über B_4 hinaus liefert M_3 , entsprechend findet man den neuen Punkt M_3' , der dem Punkt M_3 auf der anderen Seite des gegebenen Parabelbogen entspricht, durch Verdoppeln von $M_4 - B_2$ über B_2 hinaus. Den Punkt A erhält man durch Verdoppeln von $B_2 - M_4$ über M_4 hinaus, den entsprechenden Punkt auf der anderen Seite, A' , demnach durch Verdoppeln von $B_4 - M_4$ über M_4 hinaus. Zuletzt ergibt sich G durch Verdoppeln von $A - M_3$, dementsprechend G' durch Verdoppeln von $A' - M_3'$. Ebenso wie $M_3 - G$ ist $M_3' - G'$ Parabeltangente, G' Parabelpunkt. Das Weiterzeichnen ist nun selbstverständlich, es ist jedoch zu beachten, daß die Näherung um so mehr an Wert verliert, je tiefer unter die Abgangebene hinab man die Konstruktion ausdehnt.

Die schräg liegende Parabel stellt nicht nur eine geometrische Näherung dar, sondern sie hat auch physikalisch als Flugbahn einen Sinn, der sich aus folgender Überlegung ergibt: Unsere Parabel ist diejenige Kurve, auf der sich das Geschoß im luftleeren Raum unter dem alleinigen Einfluß einer in Richtung der Parabelachse, also schräg, wirkenden Kraft bewegen würde. Diese Kraft (G^*) kann man sich aus der wirklichen Schwerkraft (G) und einer im wesentlichen nach rückwärts gerichteten Zusatzkraft (W) zusammengesetzt denken. Da G und G^* über die ganze

Flugbahn gleichbleibend sind, ist es auch W , das die Bedeutung des Luftwiderstandes hat. Die parabolische Bahn kommt also dadurch zustande, daß an Stelle des tatsächlich wirkenden Luftwiderstandes, der sich mit der Fortbewegung des Geschosses nach Größe und Richtung ändert, ein solcher angenommen wird, der im ganzen Verlauf der Flugbahn gleich bleibt. Dieser „Ersatzluftwiderstand“ ergibt sich, da der tatsächliche Wert der Schußweite und, angenähert, der Gipfelhöhe (bzw. beim Verfahren bb) der des Fallwinkels) in unserer Näherungsbahn eingeht, von selbst so, daß er auf die genannten Stücke denselben Gesamteinfluß hat wie der wirkliche Luftwiderstand.

bb) Ist (bei Vorhandensein einer Schußtafel) der Fallwinkel bekannt, so unterbleibt die Bestimmung der Gipfelhöhe nach Gl. 24. Es werden Anfangs- und Endtangente (durch Antragen von ω ind B_2) gezeichnet und zum Schnitt S gebracht. C und A ergeben sich durch Halbieren von $B_1 - S$ bzw. $B_2 - S$. Nun läuft die Konstruktion wie unter aa) weiter.

Die Verfahren unter aa) und bb) liefern Flugbahnbilder mit recht guter Näherung. Die dabei entstehenden Fehler sind bei flachen Flugbahnen besonders klein. Das erklärt sich so: Je flacher die Flugbahn ist, desto enger sind die Grenzen, innerhalb deren sich der Luftwiderstand nach der Richtung wie nach dem Betrage ändert, desto besser trifft also unsere Annahme eines konstanten Widerstandes zu.

cc) Die beste Annäherung an die wahre Flugbahn, die sich mit den hier verwendeten elementaren Mitteln erreichen läßt, erhält man bei bekanntem Fallwinkel folgendermaßen: Man errechnet zunächst y_g nach Gl. 24 und x_g nach Gl. 29, zeichnet mit diesen Koordinaten den Gipfel auf und zieht die waagerechte Gipfeltangente. Dann trägt man, ebenso wie beim Verfahren nach bb) Abgangswinkel und Fallwinkel an die Abgangsebene an und bringt die so erhaltene Anfangs- und Endtangente zum Schnitt mit der Gipfeltangente. Hierauf konstruiert man durch das oben beschriebene fortgesetzte Halbieren der Tangentenabschnitte den aufsteigenden Ast für sich als denjenigen Parabelbogen, der durch Mündung, Anfangstangente, Gipfel und Gipfeltangente bestimmt ist, ebenso den absteigenden Ast als den Parabelbogen mit den Bestimmungsstücken: Gipfel, Gipfeltangente, Fallpunkt und Endtangente. Dieses Verfahren hat gegenüber den unter aa) und bb) angegebenen lediglich den Nachteil, durch die notwendige Berechnung von x_g etwas zeitraubender zu sein.

d) Folgerungen aus der Darstellung der Flugbahn als schiefe Parabel.

Dadurch, daß man die Flugbahn, wie oben (unter c)) dargelegt, durch eine schräggestehende Parabel ersetzt, gewinnt man Ausdrücke, die den Fallwinkel und die Abszisse des Gipfelpunktes, lediglich von φ , X und y_g (bzw. T , s. Gl. 24) abhängig, angeben. Die Formeln leiten sich folgendermaßen her (s. Bild 28):

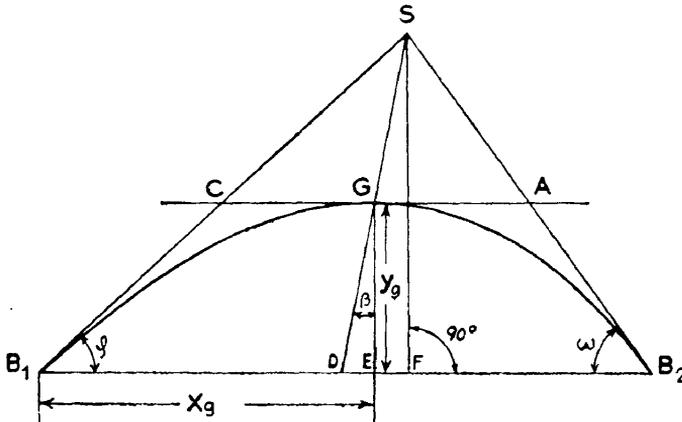


Bild 28:

aa) Gipfelentfernung:

$$\text{Da: } CG = \frac{1}{2} CA, \text{ ist: } B_1D = \frac{1}{2} B_1B_2 = \frac{X}{2}$$

$$x_g = \frac{X}{2} + DE$$

$$2DE = DF = 2y_g \cdot \cot \varphi - \frac{X}{2}$$

$$DE = y_g \cdot \cot \varphi - \frac{X}{4}$$

(28)

$$x_g \approx \frac{X}{4} + y_g \cdot \cot \varphi \approx \frac{X}{4} + \frac{g}{8} \cdot T^2 \cdot \cot \varphi$$

Das ist die unter III, e, auf S. 56 aufgeführte Formel.

bb) Fallwinkel:

$$\cot \omega = \frac{X - 2y_g \cdot \cot \varphi}{2y_g}$$

$$\cot \omega \approx \frac{X}{2y_g} - \cot \varphi \approx \frac{X}{2,44 T^2} - \cot \varphi$$

Diese Formel ist unter IV, f, 2 auf S. 66 aufgeführt.

e) Zusammenhang zwischen Endflugzeit, Schußweite und Abgangswinkel.

Endflugzeit einer nicht schußtafelmäßigen Flugbahn.

Im luftleeren Raum besteht zwischen X , T und φ die Beziehung (Gl. 11, S. 15):

$$T = 0,452 \sqrt{X \cdot \tan \varphi} = K \cdot \sqrt{X \cdot \tan \varphi}.$$

Bestimmt man für wirkliche, das heißt im luftgefüllten Raum verlaufende Flugbahnen den Faktor K aus Schußtafelangaben, so zeigt es sich, daß dieser Wert für ein bestimmtes Geschütz und Geschöß über recht weite Bereiche angenähert gleich bleibt. Das gilt auch für Flugbahnen, die insofern nicht schußtafelmäßig sind, als die v_0 , das Luftgewicht oder das Geschößgewicht von den Normalwerten abweichen; d. h. Änderungen dieser Größen beeinflussen, wenn sie nicht allzu groß sind, die Endflugzeit und die Schußweite im gleichen Sinne derart, daß der Wert von K sich wenig ändert. (Bei Flugbahnen, die durch Längswind verformt sind, ist das nicht der Fall. Längswind nimmt unter den Einflüssen, die eine Flugbahn verändern, insofern eine Sonderstellung ein, als er zwar die Schußweite ändert, die Endflugzeit aber nur ganz unwesentlich beeinflusst.)

Im allgemeinen liegt K zwischen 0,45 und 0,55, bei leichten und schweren Feldhaubitzen hat es etwa den Wert 0,47 bis (bei größeren Ladungen) 0,49. Für eine erste, grobe Abschätzung der Endflugzeit eines beliebigen Geschützes aus Schußweite und Abgangswinkel kann man $K \approx 0,5$ setzen; man erhält so:

(40a)

$$T \approx \frac{1}{2} \sqrt{X \cdot \tan \varphi}$$

Beispiel: (Lehrschußtafel) 5. Ldg., $X = 6000$ m, $\varphi = 378' + 4' = 382'$,

$$T \text{ (abgeschätzt mit } K = 0,5) = 24,3 \text{ s,}$$

$$T \text{ (Schußtafel)} = 23,5 \text{ s.}$$

Für $X = X_{\max}$, $\varphi \approx 800'$ folgt noch:

$$(40b) \quad T(X_{\max}) \approx \frac{1}{2} \sqrt{X_{\max}}$$

s. auch 2. Beispiel zu III, c, S. 56.

Die Tatsache, daß die besonderen und Witterungseinflüsse (abgesehen vom Längswind) den Wert von K nur sehr wenig verändern, ermöglicht es, wenn keine genaueren Angaben vorliegen, die Flugzeit einer durch B.W.E. verformten, also nicht schußtafelmäßigen Flugbahn mit einer für das praktische Schießen genügenden Näherung zu ermitteln. (Das kann z. B. wichtig sein, wenn es sich darum handelt, mit einem Geschütz großer Schußweite und stark abgesunkener v_0 einen beobachtbaren Sprengpunkt bei Nacht in das Gesichtsfeld eines optischen Instruments zu legen.)

Man kann dabei auf Grund folgender Überlegungen vorgehen: Die tatsächliche Flugbahn F hat die Erhöhung φ und die Schußweite X_K (= Kartenentfernung). Ihre Flugzeit T ist gleich der Flugzeit T_1 einer gedachten Flugbahn F_1 , welche unter denselben Einflüssen, wie sie bei der Flugbahn F vorliegen, jedoch ohne Längswind, entstanden wäre (da — wie schon angedeutet — Längswind die Flugzeit praktisch nicht ändert). Diese Flugbahn F_1 hätte eine Schußweite von $X_K + L$ (wobei L den Einfluß des Längswindes in m mit dem Vorzeichen der anzubringenden Verbesserung bedeutet); für ihre Flugzeit T_1 gilt:

$$T_1 = K \sqrt{(X_K + L)} \cdot \tan \varphi$$

Die Flugbahn F_1 ist durch keinen Längswind verformt. Infolgedessen gilt für sie praktisch derselbe Wert von K wie für die schußtafelmäßige Flugbahn F_2 , die durch die Erhöhung φ bestimmt ist.

Es ist also, wenn T_{BWE} bzw. X_{BWE} die schußtafelmäßig zur tatsächlich am Geschütz eingestellten Erhöhung φ gehörenden Werte sind:

$$K = \frac{T_{BWE}}{\sqrt{X_{BWE}} \cdot \tan \varphi}$$

Das ergibt, in die Gleichung für T_1 eingesetzt:

$$(40c) \quad T = T_1 \approx T_{BWE} \sqrt{\frac{X_K + L}{X_{BWE}}}$$

Es sei nur angedeutet, daß dieser Ausdruck sich, vor allem für die Rechnung ohne Rechenschieber, noch etwas vereinfachen läßt. Nach Umformung der Wurzel aus Gl. 40c zu

$$\sqrt{1 + \left(\frac{X_K + L}{X_{BWE}} - 1 \right)} \quad \text{kann man die Näherung: } \sqrt{1 + a} \approx 1 + \frac{a}{2}$$

(diese Näherung ergibt sich durch Abbrechen der binomischen Reihe für $\sqrt{1 + a}$ nach dem zweiten Glied; sie ist brauchbar, wenn a klein ist gegen Eins) anwenden.

Man erhält so:

(40d)

$$T \approx T_{BWE} \sqrt{\frac{X_K + X_{BWE} + L}{2 \cdot X_{BWE}}}$$

1. Beispiel: Für ein schweres Geschütz ist die Endflugzeit zu einem Ziel auf 25 000 m zu ermitteln, dabei betrage die Summe aller B.W.E.-Verbesserungen: + 1500 m, die Längswindverbesserung: - 500 m.

$X_{BWE} = 25\,000 + 1500 = 26\,500$ m, hierzu entnimmt man der Schußtafel die Endflugzeit T_{BWE} zu 60,5 s.

$X_K + L = 25\,000 - 500 = 24\,500$ m.

$$T \approx 60,5 \sqrt{\frac{24\,500}{26\,500}} = \underline{58,2 \text{ s}}$$

$$\left(\text{bzw. } 60,5 \sqrt{\frac{51\,000}{2 \cdot 26\,500}} = 58,2 \text{ s} \right)$$

2. Beispiel: (Lehrschußtafel). Die Endflugzeit der 3. Ldg. bei 3000 m sei nicht bekannt, sie soll über die 4. Ldg. berechnet werden. Zu 3000 m gehört in der 3. Ldg. die Erhöhung $\varphi = 282''$. Dieser Erhöhung entspricht in der 4. Ldg. die Aufsatzentfernung 3960 m (= X_{BWE}) und die Endflugzeit 15,9 s (= T_{BWE}). Für die Endflugzeit der 3. Ldg. gilt also:

$$T \approx 15,9 \sqrt{\frac{3000}{3960}} = \underline{13,8 \text{ s}}$$

d. h. in diesem Falle genau der richtige Wert. (Da in diesem Beispiel die Änderung, die den B.W.E. entspricht, gegenüber der Schußweite verhältnismäßig groß ist, darf die oben angedeutete Vereinfachung des Wurzelausdrucks nicht angewendet werden.)

* Zu dem Verfahren ist noch, besonders bezüglich seiner Genauigkeit, folgendes zu sagen:

Auf Grund der Angaben einer Schußtafel kann natürlich nur festgestellt werden, daß K bei kleinen Änderungen von X und φ und selbst noch bei der recht großen v_0 -Änderung, die einem Wechsel der Ladung entspricht, sich im allgemeinen recht wenig ändert. Nachprüfungen an anderem Material zeigen aber, daß dieses annähernde Gleichbleiben auch bei nicht allzu großen Änderungen des c -Wertes (d. h. des Luftgewichtes und des Geschossgewichtes, s. S. 27) gewahrt bleibt. (Tatsächlich wächst K etwas mit wachsendem X , mit wachsender v_0 und mit wachsendem c -Wert, s. Cranz, Ballistik Bd. I, Abakus auf Seite 704.)

Die Ermittlung der Endflugzeit nach Gl. 40c wäre dann genau, wenn K sich gar nicht oder nur mit φ ändern würde. Sie macht keinen Unterschied, ob die Verformung der Flugbahn dadurch zustande kommt, daß c vom Normalwert abweicht, oder dadurch, daß die v_0 nicht schußtafelmäßig ist. Streng genommen beeinflussen aber die beiden genannten Einflüsse, wenn sie die Schußweite um ein gleiches Maß ändern, die Endflugzeit verschieden (wenn auch nur unerheblich verschieden) stark. Besonders klein ist der Fehler, mit dem sich die Flugzeit einer nicht schußtafelmäßigen Flugbahn nach Gl. 40c ergibt, wenn lediglich die v_0 vom Normalwert abweicht. Treten dagegen sämtliche B.W.E. mit größeren Verbesserungswerten zusammen auf, so kann der Fehler in ungünstigen Fällen bis zu 2% des wahren Wertes anwachsen. Wie schon oben gesagt, dürfte jedoch die Genauigkeit für Zwecke des praktischen Schießens durchaus ausreichen, zumal da recht häufig der Einfluß der Grundstufe erheblich größer sein wird als die übrigen B.W.E., und da gerade der Einfluß einer v_0 -Änderung besonders gut erfaßt wird.

f) Rechtsabweichung.

aa) Die durch den Drall verursachte Rechtsabweichung (s. S. 36) in Strich entspricht bei Erhöhungen bis 60° ungefähr einem Zwanzigstel der Erhöhung. Die Näherung ist im allgemeinen recht brauchbar; für leichte Kaliber liefert sie etwas zu große Werte.

Beispiel: (Lehrschußtafel) 5. Ldg., $X = 5000$ m, $\varphi = 279^\circ$, Seitenverschiebung = $13'' = 1/21$ der Erhöhung.

bb) Die nachstehende bessere Näherung setzt die Kenntnis der Flugzeit voraus: Die Rechtsabweichung (Z) in m ist annähernd dem Quadrat der Endflugzeit proportional, also

$$Z \text{ (in m)} \approx K \cdot T^2,$$

wobei K für das betreffende Geschütz und Geschöß eine feste Zahl ist. Ein Durchschnittswert für K ist 0,11.

g) Abschätzung der B.W.E.

aa) v_0 -Änderung durch Änderung des Geschößgewichts bei gleichbleibender Ladung.

(41)

$$\frac{d v_0}{v_0} \approx - \frac{1}{2} \cdot \frac{d G}{G}$$

d. h. eine Zunahme des Geschößgewichts (G) um 1% bewirkt eine Abnahme der v_0 um $1/2\%$. (Daß es Änderungen in Prozenten des jeweiligen Ursprungswertes sind, zwischen denen die Gl. 41 eine Beziehung ausdrückt, leuchtet ein, sowie man sich beide Seiten der Gleichung mit 100 vervielfacht denkt. Dasselbe gilt für die nachstehende Gl. 43.)

* Herleitung: Unter der Annahme, daß die im Pulver gebundene Energie gleichbleibend ausgenützt wird, gilt:

$$\frac{G}{2g} \cdot v^2 = \frac{G_1}{2g} \cdot v_1^2$$

d. h. die Mündungswucht bleibt dieselbe ($G_1, v_1 =$ Ausgangswerte von Geschößgewicht und v_0 ; $G, v =$ veränderliche, aber zusammengehörige Werte hiervon). Durch Differenzieren der Gl.

$$a) \quad G = \frac{1}{v^2} \cdot G_1 \cdot v_1^2 \quad \text{erhält man:}$$

$$b) \quad dG = - 2 \frac{d v}{v^3} \cdot G_1 \cdot v_1^2$$

Teilt man Gl. b) durch Gl. a), so ergibt sich Gl. 41.

Die Beziehung ist in vielen Schußtafeln festgelegt: Einer Änderung des Geschößgewichts um 2 Gewichtsklassen, d. h. um 4%, entspricht eine Stufenänderung um 6 Stufen, d. h. um 2% der v_1^2 .

Der Faktor $1/2$ in Gl. 41 gilt nur für den Fall, daß die Pulverausnutzung dieselbe ist wie beim Normalgeschößgewicht. Bei größeren Gewichtsänderungen ist der Faktor auf der rechten Seite etwas kleiner als $1/2$.

bb) v_0 -Änderung durch Änderung der Pulvertemperatur,

(42)

$$d(v_0) \approx \frac{1}{1000} \cdot v_0 \cdot d(T_p)$$

d. h. eine Zunahme der Pulvertemperatur (T_p) um 1°C läßt die v_0 um etwa ein Tausendstel ihres Wertes ansteigen.

Beispiel: (Lehrschußtafel) 4. Ldg., Pulvertemperatur = $+20^\circ \text{C}$, das sind 10° über dem Normalwert. Die v_0 steigt nach Gl. 42 um 1% . Das entspricht 3 Stufen. Die Schußtafel gibt genau denselben Wert an.

cc) Schußweitenänderung durch v_0 -Änderung.

$$(43) \quad \frac{dX}{X} = a \frac{dv_0}{v_0}, \quad a \text{ liegt zwischen } 2 \text{ und } 0,5$$

d. h. eine Zunahme der v_0 um 1% bewirkt eine ungefähre Zunahme der Schußweite um 2% (dies gilt bei kleiner, 1% bei mittlerer, $0,5\%$ bei großer Schußweite).

* Herleitung; Aus Gl. 6a werde die Ableitung gebildet;

$$dX = 2 v_0 \cdot dv_0 \cdot \frac{\sin 2\varphi}{g}$$

teilt man diese durch Gl. 6a, so erhält man:

$$\frac{dX}{X} = 2 \cdot \frac{dv_0}{v_0}$$

(Diese Gleichung ergibt sich, ebenso wie Gl. 41, auch unmittelbar durch logarithmische Differentiation.)

Der Faktor 2 gilt für den luftleeren Raum. Im luftgefüllten Raum ist, wegen des starken Wachstums des Luftwiderstandes mit der v_0 , die Schußweitenänderung stets kleiner als die obige Formel angibt, und zwar in um so stärkerem Maße kleiner, je parabelunähnlicher die Flugbahn ist.

Nachprüfung an der Lehrschußtafel, Verbesserungswerte für Stufen. Eine Stufe entspricht $\frac{1}{3}\%$ der v_0 , 6 Stufen 2% . Zu erwarten sind also nach Gl. 43 bei einer v_0 -Änderung um 6 Stufen Schußweitenänderungen von 4% und darunter bis etwa 2% .

Ldg.	X	ΔX	ΔX in %
1.	2000	80	4,00
2.	3000	100	3,33
3.	4000	130	3,25
4.	5000	130	2,60
5.	6000	110	1,83

dd) Einfluß der Luftwichte (Luftgewicht) auf die Schußweite.

Eine Zunahme der Luftwichte um 1% bewirkt etwa eine Schußweitenverkürzung von $0,1\%$ bei kleinen, $0,3\%$ bei mittleren und $0,5\%$ bei großen Schußweiten.

Nachprüfung an der Lehrschußtafel, Verbesserungswerte für Luftgewicht. Luftgewicht = $1,10 \text{ kg/m}^3$, d. h. um 10% gegenüber dem Normalwert geändert; zu erwarten wären nach obiger Faustregel 1 bis 3% Schußweitenänderung.

Ldg.	X	ΔX	ΔX in %
1.	2000	20	1
2.	3000	40	1,3
3.	4000	60	1,5
4.	5000	90	1,8
5.	6000	160	2,7

Die prozentuale Änderung der Luftwichte ergibt sich ihrerseits aus folgenden Regeln:

- 1.) Eine Zunahme des Geschößgewichts um 1% wirkt sich außenballistisch [im Gegensatz zur innenballistischen Auswirkung des schwereren Geschosses, s. aa)] ebenso aus wie eine Abnahme der Luftwichte um 1%.

Herleitung: Gl. 18a (s. S. 26) kann auch geschrieben werden:

$$w = \frac{i}{\delta_0} \cdot f(v) \cdot g \cdot \frac{\delta}{Q}$$

(w = Verzögerung durch den Luftwiderstand, Q = Querschnittsbelastung.)

Die Verzögerung ändert sich in gleicher Weise, einerlei, ob man das im Zähler stehende δ um 1% verkleinert oder das im Nenner stehende Q um 1% vergrößert.

- 2.) Einer Zunahme des Luftdrucks um 1% entspricht eine Zunahme der Luftwichte um 1%.
 3.) Einer Zunahme der absoluten Temperatur (d. h. Temperatur gezählt vom absoluten Nullpunkt aus = Temperatur in °C + 273) um 1% entspricht eine Abnahme der Luftwichte um 1%.

2.) und 3.) folgen aus der „Zustandsgleichung“ für Luft. Sie lautet in einer für diesen Zweck geeigneten Form: Luftwichte δ (kg/m³) = $0,465 \cdot \frac{p}{T}$ (p = Luftdruck in mm Quecksilbersäule, T = absolute Temperatur).

ee) Längswindeinfluß.

Ein Längswind von 10 m/s verkürzt oder vergrößert die Schußweite um Beträge, die etwa zwischen 1% bei kleinen, 2% bei mittleren und 4% bei großen Schußweiten liegen.

ff) Querwindinfluß.

Ein Querwind von 10 m/s ändert die Seite um Beträge, die etwa zwischen 2' bei kleinen, 10' bei mittleren und bis zu 20' bei großen Schußweiten liegen.

ee) und ff) sind ausgesprochene Faustregeln, die nur zu groben Abschätzungen dienen können.

VI. Einige Faustregeln über Geschütze, Geschosse und über die mit ihnen erreichbaren Leistungen.

a) Schußweitenfaktor.

Als roher Anhalt für die Leistungsfähigkeit von Geschützen kann gelten: Der Quotient aus der Höchstschußweite (in km) und dem Kaliber (in cm) liegt

bei Kanonen um 1,5 bis 2,

bei Haubitzen um 1,

bei Mörsern um 1,5.

Beispiel: Die Höchstschußweite einer 10,5-cm-Haubitze wird im allgemeinen in der Größenordnung von 11 km liegen.

Muß aus irgendwelchen Gründen einem Kaliber eine wesentlich größere Schußweite abgefor-

dert werden, als sie sich aus dem Schußweitenfaktor ergibt, so geht das in der Regel auf Kosten der erreichbaren Schußgenauigkeit (die Streuungen werden groß), oft auch der Lebensdauer (die Waffe wird dadurch unwirtschaftlich, daß ihre Gesamtschußzahl klein wird oder die v_0 rasch absinkt). Unter Umständen geht auch bei einem überforderten Kaliber eine kennzeichnende Eigenschaft der betreffenden Geschützart verloren (z. B. wird bei Haubitzen die klassische Haubitzenbedingung: auf 3000 m noch mindestens 500° Fallwinkel, nicht erfüllt).

Für Sonder-(Treibspiegel- usw.) Geschosse gelten die angegebenen Zahlen nicht.

b) Ungefähre Werte der Längen- und Breitenstreuung.

Die Längsstreuung eines Geschützes läßt sich auf folgende Ursachen zurückführen:

- 1.) Schwankungen der v_0 . (Man nennt den dadurch verursachten Anteil der Streuung die v_0 -Streuung).
- 2.) Verschiedenheiten des Abgangswinkels, in der Hauptsache verursacht durch Schwingungen der Waffe, daneben auch durch Richtungenauigkeiten (sog. Winkelstreuung).
- 3.) Ungleichmäßigkeiten der Verhältnisse auf der Flugbahn und Verschiedenheiten im außenballistischen Verhalten der Geschosse (sog. außenballistische Streuung).

Bei kleinen Erhöhungen herrscht innerhalb der Gesamtlängsstreuung die Winkelstreuung vor, da in diesem Bereich schon eine kleine Änderung des Abgangswinkels die Schußweite erheblich beeinflußt. Bei Erhöhungen von 40°—45° ist die Winkelstreuung kaum von Bedeutung, hier herrschen innerhalb der Gesamtstreuung die beiden anderen Einflüsse vor.

Die Streuungen normaler Geschütze in der unteren Winkelgruppe bewegen sich — gemessen an der Schußweite — in folgender Größenordnung: Die l_{50} liegt auf den Hauptkampftfernen der betr. Ladung (zwei Drittel bis Dreiviertel der Höchstschußweite) unter einem Hundertstel der Schußweite; bei kleinen Erhöhungen ist sie relativ größer und beträgt einige Hundertstel (Grund: Winkelstreuung, s. oben!). Auch in der Nähe der Höchstschußweite wird ein Hundertstel der Schußweite meist etwas überschritten. Die b_{50} liegt im allgemeinen etwas unter einem Tausendstel der Schußweite.

In der oberen Winkelgruppe nimmt in der Regel mit wachsender Erhöhung die Längsstreuung wieder ab, bleibt aber stets größer als in der unteren Winkelgruppe auf derselben Schußweite. Die Breitenstreuung nimmt auch in der oberen Winkelgruppe mit wachsender Erhöhung zu.

c) Anhaltspunkte für Panzerdurchschlag.

Für die Beziehung zwischen Kaliber und Auftreffgeschwindigkeit eines Geschosses und der Stärke des Panzers, den dieses Geschöß noch durchschlägt, gibt es mehrere Formeln (z. B. von Krupp, de Marre u. a.). Diese Formeln sind aber durchweg für rasch vorzunehmende Abschätzungen wenig rechenhandlich, außerdem sind sie nur für jeweils ein bestimmtes Panzermaterial und für einen Auftreffwinkel genau. Besonders der letztere wird aber im Einzelfall kaum im voraus genau angebbbar sein.

In der Praxis kann man sich in vielen Fällen mit folgenden Angaben begnügen:

Eine normale Panzergranate durchschlägt bei einer Auftreffgeschwindigkeit von 600 m/s etwa einen Panzer von Kaliberstärke, bei 900 m/s anderthalb Kaliberstärken. Das gilt bei einem — als durchschnittlich anzunehmenden — Auftreffwinkel von 60°. Mit kleiner werdendem Auftreffwinkel nimmt die durchschlagene Panzerstärke rasch ab (sie ist ungefähr proportional der zweiten Potenz des Sinus des Auftreffwinkels).

Ein Hohlladungsgeschöß dagegen durchschlägt — unabhängig von der Auftreffgeschwindigkeit — einen Panzer von 1,5 bis (günstigstenfalls) 5 Kaliberstärken.

D) Zwei Verfahren zur Festlegung des Flugbahnverlaufs aus den Anfangselementen bei bekanntem Luftwiderstand.

Die für die Bedürfnisse des Soldaten zugeschnittenen Näherungsverfahren des Abschnitts C (S. 46 bis 75) bauen entweder auf Werten auf, die in der Regel einer Schußtafel entnommen werden können (etwa ω oder v), oder die, wenn eine Schußtafel fehlt, bei einem tatsächlich abgegebenen Schuß zu messen sind (etwa X oder T).

Im Gegensatz dazu lösen die beiden Verfahren dieses Abschnittes die eigentliche ballistische Aufgabe: Alle Stücke einer Flugbahn aus den Anfangselementen (φ , v_0 und dem Luftwiderstandsbeiwert des Geschosses) zu ermitteln.

1. Ein zeichnerisches Verfahren.

(nach Vahlen.)

Das folgende Verfahren bestimmt, wenn φ die v_0 und das Luftwiderstandsgesetz des betreffenden Geschosses bekannt sind, die Flugbahn in ihrer Form und ihrem zeitlichen Verlauf durch Zeichnung (s. Bild 29):

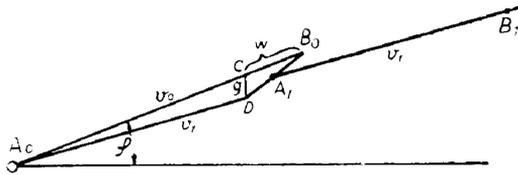


Bild 29: Zur Konstruktion der Flugbahn aus φ , v_0 und dem Luftwiderstand.

Die Konstruktion verläuft folgendermaßen (s. Bild 29): Das Geschöß befindet sich bei $t = 0$ in A_0 . $A_0 B_0$ ist $= v_0$ (nach Größe und Richtung). Aus dem Luftwiderstandsgesetz des betreffenden Geschosses berechnet man die Verzögerung in 1 Sek. ($w = c f(v)$) und trägt sie als $B_0 C$ von B_0 rückwärts (entgegen der v_0) auf. Vom Punkt C der sich dadurch ergeben hat, geht man um den Betrag der Schwerkraft g (Beschleunigung = Geschwindigkeitsänderung je Sekunde!) senkrecht abwärts bis D ; $A_0 D = v_1$ ist dann die Geschwindigkeit zu Anfang der zweiten Sekunde nach Größe und Richtung; lediglich die Lage des Geschwindigkeitspfeiles ist noch nicht die endgültige.

Nimmt man nun an, daß sich das Geschöß in der ersten Sekunde mit der mittleren Geschwindigkeit: $v_m = \frac{v_0 + v_1}{2}$ bewegt hat, dann befindet es sich am Ende der ersten Sekunde in A_1 ,

dem in der Mitte zwischen B_0 und D gelegenen Punkt. A_1 ist also der Flugbahnpunkt für den Beginn der zweiten Sekunde, und der Geschwindigkeitspfeil für diese Sekunde, $A_0 D$, ist mit seinem Anfang nach A_1 parallel zu verschieben, in die Lage $A_1 B_1$, usw.

Natürlich kann auch statt 1 Sekunde ein anderes, kleineres Δt gewählt werden, Luftwiderstandsverzögerung und Schwerkraftbeschleunigung sind dann entsprechend umzurechnen.

Praktisch kommt diese Flugbahnkonstruktion — eine Art zeichnerische Integration — aus Maßstabsgründen nur für kleinere Flugbahnstücke in Betracht.

II. Ein Verfahren zur genauen Berechnung der Flugbahn aus den Anfangselementen und dem Luftwiderstand.

** Die Beziehungen, die zwischen den Kräften, die auf das Geschöß einwirken, und der Geschößbewegung bestehen, lassen sich in einem System von Differentialgleichungen ausdrücken. Dieses System kann zwar integriert werden, die Mehrzahl der hierfür gebräuchlichen Methoden verlangt aber wesentlich mehr an mathematischen Kenntnissen, als hier vorausgesetzt werden kann.

Es läßt sich jedoch eine gewisse vereinfachende Annahme über den Zusammenhang zwischen Luftwiderstand und Geschwindigkeit machen, die zur Folge hat, daß die Differentialgleichungen der Geschößbewegung ganz besonders einfach werden. Die Verfahren zur Flugbahnberechnung, die auf dieser Annahme aufbauen, sind verhältnismäßig (gemessen an den übrigen Verfahren) elementar; eines davon (nach J. de Jong) wird im Nachstehenden erläutert. Für das Verständnis dieses Verfahrens genügt einiges Vertrautsein mit einfachen Integrationen und mit den Eigenschaften der Funktionen e^x und $\ln x$. Das Verfahren beruht auf dem Folgenden:

Ist ϑ der Neigungswinkel der Flugbahn in irgendeinem Flugbahnpunkt und $w = c \cdot f(v)$ die Verzögerung des Geschosses durch den Luftwiderstand, so ist die Komponente der Verzögerung in der x -Richtung, in der nur der Luftwiderstand geschwindigkeitsändernd wirkt:

$$(a) \quad \frac{d(v_x)}{dt} = -w \cdot \cos \vartheta = -c \cdot f(v) \cdot \cos \vartheta$$

und in der y -Richtung, in der zu der entsprechenden Komponente des Luftwiderstandes noch die Wirkung der Erdanziehung tritt:

$$(b) \quad \frac{d(v_y)}{dt} = -w \cdot \sin \vartheta - g = -c \cdot f(v) \cdot \sin \vartheta - g$$

Es wird nun angenommen, der Luftwiderstand sei proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit, also:

$$(c) \quad w = c \cdot f(v) = c \cdot v$$

Das gibt, eingesetzt in Gl. a:

$$d(v_x) = -c \cdot v \cdot \cos \vartheta \cdot dt,$$

und da:

$$v \cdot \cos \vartheta = v_x$$

$$(d) \quad d(v_x) = -c \cdot v_x \cdot dt$$

Entsprechend ergibt sich aus Gl. b und c für $d(v_y)$

$$d(v_y) = -(c \cdot v \cdot \sin \vartheta + g) \cdot dt$$

und da: $v \cdot \sin \vartheta = v_y$

$$(e) \quad d(v_y) = -(c \cdot v_y + g) \cdot dt = -c \left(v_y + \frac{g}{c} \right) \cdot dt$$

[Diese Stelle der Herleitung der Gleichungen ist wesentlich für die Einfachheit des Verfahrens. Nur dadurch, daß v aus den Differentialgleichungen herausfällt, was wiederum nur beim linearen Luftwiderstandsgesetz der Fall ist, werden die beiden Differentialgleichungen in der x - und y -Richtung unabhängig voneinander und damit einzeln integrierbar. Jede andere physikalisch vernünftige Annahme über den Luftwiderstand führt zu verwickelteren Differentialgleichungen und zwingt zu wesentlich umständlicheren Integrationsverfahren.]

Trennt man die Veränderlichen in Gl. d, so hat man:

$$\frac{d(v_x)}{v_x} = -c \cdot dt$$

Das gibt integriert (wobei sich die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung bestimmt: $t = 0, v_x = v_0 \cdot \cos \varphi$)

$$\ln \frac{v_x}{v_0 \cdot \cos \varphi} = -c \cdot t,$$

und nach v_x aufgelöst:

(f)

$$v_x = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot e^{-ct}$$

Trennt man in Gl. e die Veränderlichen, so hat man, da

$$d(v_y) = d\left(v_y + \frac{g}{c}\right) \text{ ist,}$$

$$\frac{d(v_y + g/c)}{v_y + g/c} = -c \cdot dt.$$

Das gibt integriert (Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung: $t = 0, v_y = v_0 \cdot \sin \varphi$)

$$\ln \frac{v_y + \frac{g}{c}}{v_0 \cdot \sin \varphi + \frac{g}{c}} = -c t,$$

und nach v_y aufgelöst:

(g)

$$v_y = -\frac{g}{c} + \frac{g + c \cdot v_0 \cdot \sin \varphi}{c} \cdot e^{-ct}$$

Durch nochmaliges Integrieren (mit der Anfangsbedingung: $t = 0, x = 0$) erhält man aus Gl. f:

(h)

$$x = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1 - e^{-ct}}{c}$$

und entsprechend aus Gl. g (mit der Anfangsbedingung: $t = 0, y = 0$)

(i)

$$y = -\frac{g}{c} \cdot t + \frac{g + c \cdot v_0 \cdot \sin \varphi}{c^2} \cdot (1 - e^{-ct})$$

Damit sind die Gleichungen für die Koordinaten eines Flugbahnpunktes, ausgedrückt durch t als Parameter, gewonnen.

Für das weitere Rechnen sind die folgenden Beziehungen, die man durch Umformen oder Kombinieren der hergeleiteten Gleichungen erhält, wichtig:

Gl. f ergibt, da: $v_{x(0)} = v_{x(0)}$ = waagerechter Anteil der v_0

(k)

$$t = \frac{1}{c} \cdot \ln \frac{v_{x(0)}}{v_x} = \frac{2,3026}{c} \cdot \lg \frac{v_{x(0)}}{v_x}$$

Aus den Gl. f und h folgt:

(l)

$$x = \frac{1}{c} (v_{x(0)} - v_x)$$

und entsprechend aus Gl. g und i:

$$(m) \quad y = \frac{1}{c} (v_{y(0)} - v_y - g t)$$

Weiterhin erhält man v_y unmittelbar in Abhängigkeit von v_x , indem man e^{-ct} aus Gl. f ausdrückt und diesen Wert in Gl. g einsetzt, zu:

$$(n) \quad v_y = \frac{v_0 \cdot \sin \varphi + \frac{g}{c} \cdot v_x - g}{v_0 \cdot \cos \varphi} = \frac{v_{y(0)} + \frac{g}{c} \cdot v_x - g}{v_{x(0)}}$$

Diese Gleichung ist in bezug auf v_x und v_y vom ersten Grade, ihre Bildkurve (der sog. Hodograph des betreffenden Luftwiderstandsgesetzes) mit v_x und v_y als rechtwinkligen Koordinaten ist also eine Gerade (s. Bild 30).

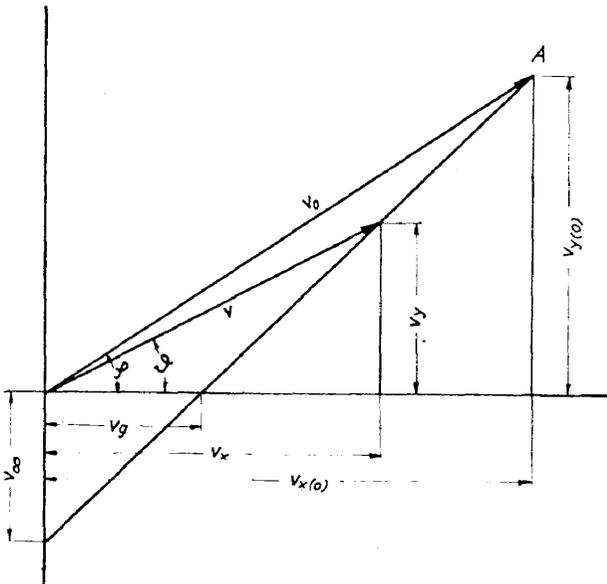


Bild 30: Der Hodograph bei linearem Luftwiderstandsgesetz.

Setzt man $v_y = 0$, so wird v_x gleich der Gipfelfeschwindigkeit v_g , man findet:

$$(o) \quad v_g = \frac{g \cdot v_0 \cdot \cos \varphi}{g + c \cdot v_0 \cdot \sin \varphi} = \frac{g \cdot v_{x(0)}}{g + c \cdot v_{y(0)}}$$

Mit $v_x = 0$ wird v_y gleich der Grenzgeschwindigkeit auf der senkrechten Asymptote der Flugbahn (s. S. 41). Man erhält:

$$(p) \quad v_x = -\frac{g}{c}$$

Bei $v_x = v_g$ und $v_y = v_x$ schneidet natürlich der Hodograph die Koordinatenachsen.

Da $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ und $\tan \vartheta = \frac{v_y}{v_x}$ sind, hat die Strecke zwischen dem Hodographenpunkt P und dem Nullpunkt die Länge v und den Neigungswinkel ϑ .

Man kann sich also den Hodographen auch so entstanden denken, daß die Geschwindigkeitsvektoren aller Flugbahnpunkte vom Nullpunkt aus mit ihren jeweiligen Neigungswinkeln angetragen, und daß ihre Endpunkte miteinander verbunden worden sind. (Das ist sogar die ursprüngliche Bedeutung des Hodographen.)

In Polarkoordinaten, also in v und ϑ , erhält man die Hodographengleichung, indem man setzt: $v_y = v \cdot \sin \vartheta$, $v_x = v \cdot \cos \vartheta$.

Aus Gl. n entsteht hierdurch:

$$v \cdot \sin \vartheta = \frac{v_{y(0)} + \frac{g}{c}}{v_{x(0)}} \cdot v \cdot \cos \vartheta - \frac{g}{c}$$

oder:

$$(q) \quad \sin \vartheta = \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{g}{c \cdot v_{x(0)}} \right) \cdot \cos \vartheta - \frac{g}{c \cdot v}$$

Mit diesen Gleichungen, die auf Grund des angenommenen linearen Luftwiderstandsgesetzes gewonnen sind, läßt sich die Flugbahn auf verhältnismäßig elementare Weise in kleinen Stücken berechnen.

Der Abweichung, die das tatsächliche Verhalten des Luftwiderstandes vom linearen Verlauf zeigt, wird man dadurch gerecht, daß man von Flugbahnstück zu Flugbahnstück jeweils einen anderen Wert für c wählt. Dabei geht man folgendermaßen vor: Man nimmt zunächst einen Wert an, den v am Ende des ersten Flugbahnstückes haben soll, diese Geschwindigkeit sei v_1 , der v -Abfall bis dahin sei Δv . Also: $v_1 = v_0 - \Delta v$ (etwa $\Delta v = 20 \text{ m/s}$). Dann ermittelt man (aus der $f(v)$ - oder $K(v)$ -Kurve oder einer Tabelle) den Luftwiderstand W für die mittlere Geschwindigkeit (v_m) des betreffenden Flugbahnstückes: $v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) = v_0 + \frac{\Delta v}{2}$ und berechnet den c -Wert dieses Flugbahnstückes

aus: $W = \frac{G}{g} \cdot c \cdot v_m$ (Gl. 18c, S. 27). Man erhält: $c = \frac{W \cdot g}{G \cdot v_m}$, und da

$$W = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot f(v) = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot v^2 \cdot K(v), \text{ so folgt für } c:$$

$$(r) \quad c = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot \frac{g}{G} \cdot \frac{f(v_m)}{v_m}$$

bzw., wenn $K(v)$ gegeben ist:

$$(s) \quad c = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot \frac{g}{G} \cdot K(v_m) \cdot v_m$$

Den so bestimmten Mittelwert von c betrachtet man als konstant für den Bereich zwischen v_0 und v_1 ; der Fehler, den man dabei macht, ist um so unerheblicher, je kleiner man Δv gewählt hat.

Mit c , $v_{x(0)}$ und $v_{y(0)}$ zeichnet man die Hodographengerade (s. Bild 30); ihr Punkt A ist durch seine Koordinaten $v_{x(0)}$ und $v_{y(0)}$ gegeben, ihr Abschnitt auf der waagerechten Achse (v_0) errechnet sich aus Gl. o. Nun schlägt man mit dem Radius $r = v_1$ um den Nullpunkt einen Kreisbogen bis zum Schnitt mit der Hodographengeraden und liest am Schnittpunkt die Werte von $v_{x(1)}$, $v_{y(1)}$ (= recht-

winklige Koordinaten des Schnittpunktes), sowie den Neigungswinkel ϑ_1 für das Ende des betrachteten Flugbahnstücks ab. (Man kann statt dieser zeichnerischen Schritte auch mit c , $v_{x(0)}$ und $v_{y(0)}$ nach Gl. q den Wert von ϑ_1 rechnerisch ermitteln und hiermit $v_{x(1)}$ und $v_{y(1)}$ als die Anteile von v_1 berechnen. Das nachstehende Zahlenbeispiel ist so durchgeführt.)

Mit $v_{x(1)}$ berechnet man dann t_1 nach Gl. k, und schließlich mit $v_{x(1)}$ und $v_{y(1)}$ aus den Gleichungen l und m die Koordinaten des Endpunktes des ersten Flugbahnstücks: x_1 und y_1 .

Für die Berechnung des zweiten Flugbahnstücks dienen als Anfangselemente die ermittelten Endwerte des ersten Stücks, usw.

Man kann mit dem hier geschilderten Verfahren theoretisch eine sehr große Genauigkeit erreichen, wenn man um genügend kleine v -Beträge fortschreitet. Es ist aber sinnlos, die Rechengenauigkeit über ein gewisses Maß hinaus steigern zu wollen, weil das wahre Luftwiderstandsgesetz des betreffenden Geschosses doch nie völlig genau bekannt sein wird (s. S. 31).

Beispiel: (rechnerisch durchgeführt): Kaliber = 10,5 cm, $G = 14,86$ kg, $i = 0,86$, $v_0 = 410$ m/s, $\varphi = 200^\circ$, $\delta = \delta_0$ (= Normalluftwichte). Als v_1 wird 390 m/s gewählt, also $\Delta v = 20$ m/s und somit $v_m = 400$ m/s. Der Tabelle auf S. 29 entnimmt man für $v = 400$ m/s den Wert: $K(v) = 3,843 \cdot 10^{-6}$. Daraus ergibt sich der Mittelwert von c für dieses Intervall nach Gl. s zu

$$c_{(400)} = \frac{10,5^2}{4} \cdot \pi \cdot 0,86 \cdot \frac{9,81}{14,86} \cdot 3,843 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 0,0756$$

Somit lautet Gl. q mit eingesetzten Zahlenwerten:

$$\sin \vartheta_1 = \left(\tan 200^\circ + \frac{9,81}{0,0756 \cdot 410 \cdot 0,981} \right) \cdot \cos \vartheta_1 - \frac{9,81}{0,0756 \cdot 390}$$

oder, ausgerechnet:

$$\sin \vartheta_1 = 0,5214 \cdot \cos \vartheta_1 - 0,3327.$$

Nach kurzem, systematischen Probieren (das geht schneller als das Auflösen der quadratischen Gleichung für $\sin \vartheta_1$, in die sich die vorliegende Gleichung umformen läßt), findet man:

$$\vartheta_1 = 184,5^\circ (= 10^\circ 23') \text{ und daraus:}$$

$$v_{x(1)} = 390 \cdot \cos \vartheta_1 = 383,6 \text{ m/s, und:}$$

$$v_{y(1)} = 390 \cdot \sin \vartheta_1 = 70,2 \text{ m/s.}$$

Gl. k ergibt für t_1 :

$$t_1 = \frac{2,3026}{0,0756} \cdot \lg \frac{410 \cdot \cos 200^\circ}{390 \cdot \cos 184,5^\circ} = \frac{2,3026}{0,0756} \cdot 0,02046 = \underline{0,623 \text{ s.}}$$

Schließlich erhält man noch aus Gl. l und m:

$$x_1 = \frac{1}{0,0756} (410 \cdot \cos 200^\circ - 383,6) = \frac{18,5}{0,0756} = \underline{244,9 \text{ m}}$$

und:

$$y_1 = \frac{1}{0,0756} (410 \cdot \sin 200^\circ - 70,2 - 9,81 \cdot 0,623) = \underline{48,7 \text{ m.}} \quad (\text{rectius } 46,688)$$

Das Geschöß hat also nach 0,623 s den Punkt P_1 mit den Koordinaten: $x_1 = 244,9$ m, $y_1 = 48,7$ m erreicht; seine Geschwindigkeit in diesem Punkt beträgt: $v_1 = 390$ m/s,

ihre Anteile: $v_{x(1)} = 383,6 \text{ m/s}$ und $v_{y(1)} = 70,2 \text{ m/s}$; die Bahnneigung ist: $\theta_1 = 184,5^\circ - 10^\circ 23'$.

E. Streuung und Treffwahrscheinlichkeit.

I. Allgemeines. Die Fehlerkurve.

Grundsätzliches zur Frage der Streuung und Treffwahrscheinlichkeit ist für den Soldaten in der Schießvorschrift leicht faßlich zusammengestellt.

Im Folgenden soll (unter Verzicht auf Vollständigkeit und mathematische Strenge) auf die Lehre von der Treffwahrscheinlichkeit etwas näher eingegangen werden.

Zunächst sei daran erinnert, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses angegeben wird durch die Zahl der im Sinne der Betrachtung günstigen Fälle, geteilt durch die Zahl der überhaupt möglichen Fälle. Die Wahrscheinlichkeit ist also im allgemeinen ein echter Bruch; ist sie gleich eins, so bedeutet das die Gewißheit für das Eintreten des betreffenden Ereignisses.

[Dem Artilleristen ist eine etwas andere Ausdrucksweise geläufig, mit der er aber dasselbe meint. Er drückt die Wahrscheinlichkeit in Prozenten, also mit 100 vervielfacht, aus, indem er z. B. sagt, daß bei großer Schußzahl in einem bestimmten Bereich 50% aller Schüsse zu erwarten sind. Diese Angabe ist gleichbedeutend mit der Aussage: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die betreffende Zone mit einem Schuß getroffen wird, beträgt 1/2.]

Der angegebenen Begriffsbestimmung der Wahrscheinlichkeit liegt die Vorstellung zugrunde, daß der zu untersuchende Vorgang schon wiederholt abgelaufen und die vorkommenden Fälle abgezählt seien. Ist es nicht möglich, diese Abzählung — auch in Gedanken — vorzunehmen, ist aber von einem Vorgang ein genügend großer Teilverlauf schon beobachtet, so kann hieraus auf die Wahrscheinlichkeit für den weiteren Verlauf geschlossen werden. Beispiel: In einem Sack befindet sich eine große Zahl von Kugeln, von denen nur bekannt ist, daß es weiße und schwarze, gründlich durchgemischt, sind. Nun wird fünfzigmal je eine Kugel dem Sack entnommen, die Farbe festgestellt, die Kugel zurückgetan und der Inhalt des Sackes erneut gemischt. Findet man hierbei 30 weiße und 20 schwarze Kugeln, so kann man annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, auch weiterhin mit einem Griff eine schwarze Kugel zu ziehen, $\frac{2}{5}$ beträgt.

Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn es sich darum handelt, festzustellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ziel getroffen wird. Es muß auch hier aus vielen, schon beobachteten „Ereignissen“ auf künftige Vorgänge geschlossen werden (dasselbe gilt auch für verschiedene andere Gebiete, in denen die Wahrscheinlichkeit eine Rolle spielt, z. B. Versicherungswesen, Biologie, Statistik u. a.).

Daß ein solches Vorausschließen möglich ist, zeigt die Erfahrung, die sich bezüglich der Verteilung der Schüsse eines Treffbildes in überaus vielen Fällen ergeben hat. Bekanntlich ist es praktisch unmöglich, eine Anzahl von Schüssen unter Verhältnissen abzugeben, die untereinander völlig gleich sind. Infolge kleiner Verschiedenheiten des Abgangswinkels, der v_0 und der außenballistischen Einflüsse (s. auch S. 79) kommt vielmehr die unter dem Namen Streuung bekannte Erscheinung zustande, d. h. die Schüsse verteilen sich über eine gewisse Fläche. Bei einem Treffbild von nur wenigen Schüssen scheint das zunächst regellos der Fall zu sein. Je mehr aber die Schußzahl anwächst, desto klarer zeigt es sich, daß die Verteilung der Schüsse nach ihrer Häufigkeit immer wieder einem und demselben Gesetz folgt.

Diese Gesetzmäßigkeit der Trefferverteilung, die, wie schon angedeutet, auf Grund sehr vieler Erfahrungen als gesichert gelten kann, und die es gestattet, Fragen der Treffwahrscheinlichkeit vorausschauend zu beantworten, sei zunächst der Gegenstand einer eingehenderen Betrachtung. Hierzu nehmen wir an, es seien mit einem Geschütz bei gleichbleibender Höhen- und Seitenrichtung und gleicher Ladung eine große Zahl von Schüssen auf ein waagerechtes Zielgelände ab-

gegeben worden. In dem so entstandenen Treffbild wird die Verteilung der Schüsse bezüglich der Schußweite untersucht (für die Verteilung nach der Breite, oder, wenn auf eine senkrechte Scheibe geschossen wird, nach der Höhe, gilt alles nachstehend Gesagte mit den nötigen sinngemäßen Änderungen ebenfalls). Zunächst werden die Schußweiten der einzelnen Schüsse ausgemessen; das arithmetische Mittel aus diesen Schußweiten ergibt die Entfernung des mittleren Treffpunktes.

Vom mittleren Treffpunkt ausgehend wird das Zielgelände nach beiden Seiten (d. h. nach dem Geschütz zu und von diesem weg) in 1 m breite Streifen, die quer zur Schußrichtung verlaufen, eingeteilt. Nun werden die auf jeden einzelnen dieser Streifen entfallenden Schüsse abgezählt. Die so gefundene Schußverteilung stellt man bildlich dar (s. Bild 31), indem man auf der x -Achse (= Schußrichtung) über jedem Meter ein Rechteck aufzeichnet, dessen Flächeninhalt der Trefferzahl (T) in diesem Meterstreifen entspricht. Nullpunkt der x -Werte (der „Abweichungen“ der Schüsse) ist der mittlere Treffpunkt. (Auch im Folgenden ist die Abweichung x stets auf den mittleren Treffpunkt -- nicht auf ein etwaiges Ziel -- bezogen.) Die Mittelpunkte der oberen Rechtecksbegrenzungen werden nun durch einen Kurvenzug verbunden.

Je größer die abgegebene Schußzahl ist, und je feiner die Unterteilung gewählt wird (z. B. statt Meter- Halb- oder Viertelmeterstreifen), desto mehr nähert sich dieser Kurvenzug einer gewissen Idealform, wie sie Bild 31 wiedergibt.

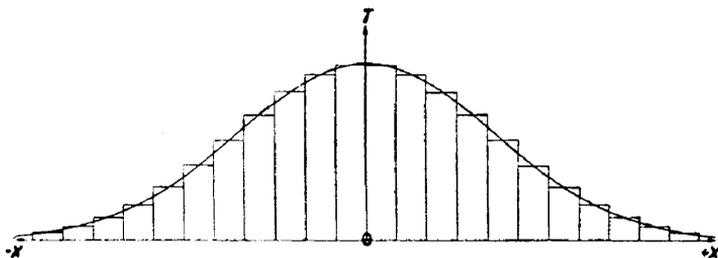


Bild 31: Zur Entstehung der Kurve, die die Verteilung der Schüsse eines Treffbildes (bei großer Schußzahl) kennzeichnet.

Diese, von uns durch den Versuch gefundene Kurve, wird analytisch durch die von Gauß angegebene Funktion

$$T = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}$$

wiedergegeben. Dabei sind x und T die Koordinaten eines Punktes der „Gaußschen Fehlerkurve“, e die Basis des natürlichen Logarithmensystems (= 2,718...); über h , eine für die betreffende Kurve bezeichnende feste Zahl, wird noch Näheres ausgeführt werden.

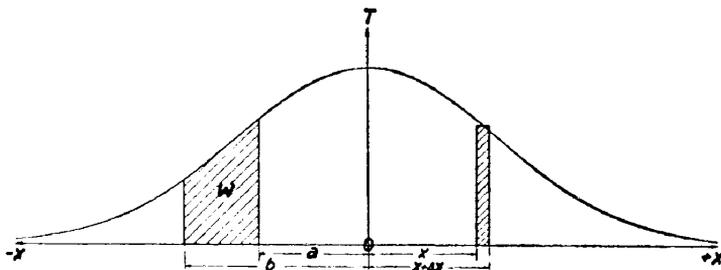


Bild 32: Die Fläche unter der Gauß'schen Fehlerkurve als Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das betr. Gebiet getroffen wird. Text s. S. 88.

Die Wiedergabe durch die Gaußsche Funktion hat sich in außerordentlich vielen Fällen als berechtigt und praktisch erwiesen; unter bestimmten Annahmen kann sie auch theoretisch abgeleitet werden.

[Es verteilen sich übrigens auch andere „Ereignisse“ oder Größen, die von kleinen, nicht einseitig wirkenden Ursachen beeinflußt werden, nach demselben Verteilungsgesetz, das durch diese Idealkurve wiedergegeben wird. Das gilt z. B. ebenso für die Einzelbeobachtungen einer Meßreihe, wie für die Körpergröße der Bewohner einer Stadt.]

Der Verlauf der Gaußschen Kurve („Fehlerkurve“, „Wahrscheinlichkeitskurve“, der Form wegen auch „Glockenkurve“ genannt) ist aus Bild 32 ersichtlich. Sie nähert sich für sehr große positive und negative Werte von x der x -Achse, d. h., sie hat diese Achse zur Asymptote. Das bedeutet, daß auch sehr große Abweichungen vom Mittelwert — wenn auch außerordentlich selten — noch vorkommen können.

Aus dem Verfahren, das zu unserer Fehlerkurve führte, folgt unmittelbar, daß in Bild 32 das schraffierte Rechteck (rechts der T -Achse) von der mittleren Höhe T und der kleinen Ausdehnung Δx ein Maß für den Bruchteil der Gesamtschußzahl ist, der bei einer Wiederholung des Treffbildes zwischen x und $x + \Delta x$ erwartet werden darf. Danach wird das Maß für die in einem größeren Bereich zu erwartenden Treffer durch die Summe entsprechend aneinander gefügter schmaler Rechtecke (jedes mit der Mitte der oberen Begrenzung bis zur Kurve reichend) gegeben. Diese Summe, gebildet z. B. zwischen den Abszissen a und b , ist gleich der Fläche W unter der Kurve. Die Gaußsche Funktion leistet aber noch mehr. Flächenstücke unter der Kurve (entsprechend der Fläche W) sind nämlich nicht nur den Treffwahrscheinlichkeiten für die betreffenden Bereiche proportional, sondern sogar gleich. Genau ausgedrückt: Die Größe der Fläche W über dem Abszissenabschnitt $a-b$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schuß zwischen $x = a$ und $x = b$ einschlägt.

* In mathematischer Schreibweise heißt das:

$$\text{Fläche } W = \int_{x=b}^{x=a} \frac{h}{\pi} \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx = \text{der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abweichung } x \text{ eines}$$

Schusses zwischen a und b liegt.

Für das ganze von der Gaußschen Kurve bedeckte Gebiet zwischen $x = -\infty$ und $x = +\infty$ ist die Wahrscheinlichkeit des Getroffenwerdens gleich der Gewißheit, da ein abgefeuerter Schuß ja sicherlich irgendwo einschlägt. Es gilt also:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{h}{\pi} \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx = 1$$

Der Faktor $\frac{h}{\pi}$, der den Ordinatenmaßstab der Kurve festlegt, rührt daher, daß diese Gleichung erfüllt sein muß.

II. Die Streuungsmaße.

Die Ordinate im Nullpunkt hat den Wert $\frac{h}{\pi}$ (da $e^0 = 1$). Die Größe h führt den Namen

„Genauigkeitsmaß“, denn je größer h ist, desto höher und „schmäler“ ist die Gaußsche Kurve (sie bedeckt immer eine Fläche von der Größe 1), d. h., desto kleiner ist die Streuung (s. Bild 33, das zwei Fehlerkurven mit verschiedenen Werten von h zeigt).

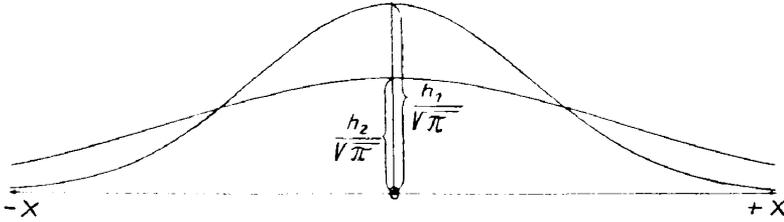


Bild 33: Fehlerkurven zweier verschieden stark streuender Vorgänge, oder Trefferverteilung zweier Geschütze von verschieden großer Streuung.

In der Praxis kennzeichnet man einen „streuenden“ Vorgang — ob es sich nun um das Schießen eines Geschützes, eine Reihe von Messungen oder ähnliches handelt — meist nicht durch die Größe h , sondern durch gewisse besonders bezeichnende Durchschnitts- oder Mittelwerte der Abweichungen, die man aus den gemessenen Abweichungswerten berechnen kann. Die Gesamtausdehnung des Treffbildes ist zur Kennzeichnung der Streuung ungeeignet, da sie nicht von der Schußzahl, besonders wenn diese klein ist, unabhängig ist (s. S. 95).

Die Gesamtausdehnung eines Treffbildes wird häufig als 100%ige Streuung bezeichnet. Diese Bezeichnung ist zwar üblich, sie ist jedoch wegen des Zusammenhangs mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit nicht ganz glücklich. Innerhalb der Gesamtausdehnung eines Treffbildes liegen zwar 100% aller in diesem Falle abgegebenen Schüsse, damit ist aber über die Ausdehnung des Bereichs, in dem bei unbeschränkter Schußzahl 100% aller Schüsse zu erwarten sind — das ist streng genommen der Sinn des Ausdrucks: 100%ige Streuung — nichts gesagt. Theoretisch ist dieser Bereich unbeschränkt groß. (S. hierzu auch S. 88 und 95.)

Im Gegensatz zur Gesamtausdehnung des Treffbildes sind die nachstehend aufgeführten Größen:

d (durchschnittliche Abweichung),

w (mittlere quadratische Abweichung),

r (wahrscheinliche Abweichung),

l_{50} bzw. b_{50} oder h_{50} (50%ige Streuung nach der Länge bzw. Breite oder Höhe),

ebenso wie h , bis zu einem gewissen Grade von der Schußzahl unabhängig. (Natürlich sind diese Größen auch ihrerseits mit Ungenauigkeiten — Fehlern — behaftet, die um so kleiner sind, je mehr Schüsse oder Meßergebnisse zur Verfügung stehen.)

Es bedeuten im Folgenden: n die Schußzahl, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ die Abweichung jedes einzelnen Schusses vom arithmetischen Mittel (mittleren Treffpunkt), dann ist:

1.) Die durchschnittliche Abweichung (oder der durchschnittliche Fehler)

$$d = \frac{\sum |x|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

Man bestimmt also d aus dem Treffbild, bzw. aus den Abweichungen der einzelnen Schüsse, indem man die absoluten Beträge aller Abweichungen (d. h. alle Abweichungen mit dem Vorzeichen + genommen) zusammenzählt und die Summe durch $\sqrt{n(n-1)}$ teilt. Mittels der später angegebenen Zahlenbeziehungen (s. S. 90) kann man daraus dann r und l_{50} errechnen (s. Beispiel auf S. 91).

2.) die mittlere quadratische Abweichung (oder der mittlere quadratische Fehler)

$$w = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1}}$$

d. h., um w zu bestimmen, sind die Quadrate aller Abweichungen zusammenzuzählen, die

Summe durch $n - 1$ zu teilen und aus dem Ergebnis die Wurzel zu ziehen. Man findet also w unmittelbar aus dem Treffbild, d. h. aus den einzelnen Abweichungen der Schüsse, und erhält daraus mittels der später angegebenen Zahlenbeziehungen alle anderen für die Streuung bezeichnenden Größen, s. Beispiel auf S. 91.

Diese Bestimmung der Streuungsmaße über w ist zwar etwas umständlicher als die oben angegebene Bestimmung über d , sie stellt jedoch das genaueste Verfahren dar.

Bei $+w$ und $-w$ hat übrigens die Fehlerkurve ihre beiden Wendepunkte (Punkte, an denen die Krümmungsrichtung der Kurve wechselt).

- 3.) Die wahrscheinliche Abweichung (oder der wahrscheinliche Fehler) r , das ist die Abweichung, die mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ unterschritten wird (die Wahrscheinlichkeit, daß sie überschritten wird, ist natürlich ebenfalls $1/2$). Oder: die Abweichung, die bei sehr großer Schußzahl ebenso oft unter- wie überschritten wird. (Man beachte: die wahrscheinliche Abweichung ist nicht diejenige Abweichung, die am wahrscheinlichsten eintritt. Diese letztere ist gleich Null, d. h., von allen Punkten hat der mittlere Treffpunkt die größte Wahrscheinlichkeit getroffen zu werden.)

Die wahrscheinliche Abweichung gibt an, in welchem Abstand vom mittleren Treffpunkt ein Lot gezogen werden muß, das die auf einer Seite des mittleren Treffpunktes liegende Fläche unter der Fehlerkurve halbiert. Siehe Bild 34, die beiden schraffierten Flächen sind gleich groß.

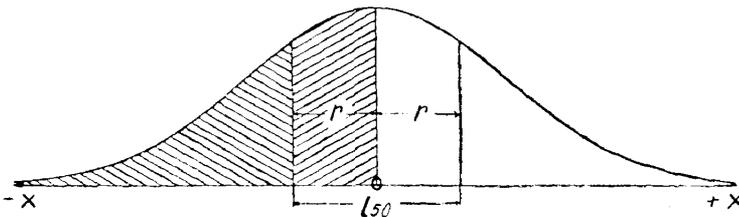


Bild 34: Zum Begriff des wahrscheinlichen Fehlers (r) und der 50%igen Streuung (l_{50}).

Schreitet man vom mittleren Treffpunkt aus nach beiden Seiten um den Betrag der wahrscheinlichen Abweichung fort, so erhält man:

- 4.) die 50%ige Streuung (l_{50} bzw. b_{50} bzw. h_{50}). Zwei Lote beiderseits des mittleren Treffpunktes, die von diesem jeweils den Abstand r haben, schließen die innere Hälfte der gesamten von der Kurve bedeckten Fläche ein (s. Bild 34). Die 50%ige Streuung ist also das symmetrisch zum mittleren Treffpunkt gelegene Gebiet, in dem 50% aller Schüsse zu erwarten sind, oder dasjenige Gebiet, das von sehr vielen Schüssen die dem mittleren Treffpunkt näher gelegene Hälfte aufnimmt. Sie könnte — ebenso wie die wahrscheinliche Abweichung — bei sehr vielen Schüssen unmittelbar durch Auszählen gefunden werden.

Die 50%ige Streuung ist die Größe, mit der der Artillerist die Schießleistung einer Waffe mißt bzw. kennzeichnet.

h , r und l_{50} hängen durch folgende feste Zahlenbeziehungen, deren Ableitung hier nicht angedeutet werden soll, mit d und w zusammen:

$$h = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} = 0,5642/d = \frac{1}{w\sqrt{2}} = 0,7071/w$$

$$r = 0,8453 \cdot d = 0,6745 \cdot w \approx 2/3 w$$

$$l_{50} \text{ (bzw. } b_{50}, \text{ bzw. } h_{50}) = 2r = 1,691d = 1,349w$$

Im folgenden Beispiel ist die Ermittlung der l_{50} aus den Angaben eines tatsächlich erschossenen Treffbildes durchgeführt.

Bodentreffbild.

geschossen mit mittleren Kaliber und mit der Erhöhung 360^m

Schuß-Nr.	Entfernung X (m)	Abweichung		x^2
		-x (m)	+x (m)	
1	6959	19		361
2	6938	40		1600
3	6946	32		1024
4	6983		5	25
5	6964	14		196
6	7003		25	625
7	7006		28	784
8	7011		33	1089
9	6973	5		25
10	6976	2		4
11	6994		16	256
12	6979		1	1
$\Sigma X = 83732$		112*)	108*)	$\Sigma x^2 = 5990$
$\frac{\Sigma X}{n} = 6978 \text{ m}$				

a) Bestimmung der l_{50} über d (dazu werden die in der letzten Spalte aufgeführten Quadrate der Abweichungen nicht benötigt).

$$\Sigma |x| = 112 + 108 = 220$$

$$d = \frac{220}{\sqrt{11 \cdot 12}} = 19,15 \text{ m}$$

$$l_{50} = 1,691 \cdot d = 32,4 \text{ m.}$$

b) Genauere Bestimmung über w

$$\frac{\Sigma x^2}{n - 1} = w^2 = 544,6$$

$$w = \sqrt{544,6} = 23,33$$

$$l_{50} = 1,349 w = 31,48 \text{ m, abgerundet } 31 \text{ m.}$$

c) Beim Auszählen der l_{50} verfährt man so, daß man, von beiden Seiten her nach der Mitte des Treffbildes zu fortschreitend, die „schlechtere Hälfte“ der Schüsse ausscheidet: Zuerst den weitesten und den kürzesten Schuß, dann den zweitweitesten und den zweitkürzesten usw. Man erhält auf diese Weise im obigen Beispiel den ungefähren Wert 30 m, d. h. in diesem Falle eine recht gute Übereinstimmung mit dem genaueren errechneten Wert. Im allgemeinen ist das Verfahren bei so kleinen Schußzahlen noch verhältnismäßig ungenau, es hat aber den Vorteil, daß man es am Bodentreffbild selbst, noch bevor man es ausgemessen hat, vornehmen kann.

Schließlich sei noch die l_{50} mit der Gesamtausdehnung des Treffbildes verglichen:

$$\begin{array}{rcl} \text{Größtes } + x & = & 33 \text{ m} \\ \text{Größtes } - x & = & 40 \text{ m} \\ \hline \text{Gesamtausdehnung} & = & 73 \text{ m} \end{array}$$

Die Gesamtausdehnung beträgt in diesem Falle das 2,34fache der l_{50} (s. S. 96).

*) Die Summe der positiven und der negativen Abweichungswerte vom genauen arithmetischen Mittel sind natürlich einander gleich. Kleine Unterschiede können, wie in diesem Falle, daher rühren, daß die Abweichungen gegen einen auf- oder abgerundeten Mittelwert gebildet sind.

III. Die Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren.

** Das Gaußsche Fehlerintegral, das in der auf S. 88 angegebenen Form die Treffwahrscheinlichkeit auf dem Weg über h bestimmt, ist für den Artilleristen, dessen Streuungsmaß die 50%ige Streuung ist, nicht ohne weiteres brauchbar. Wir formen es daher um, so daß $\frac{x}{r}$ als Integrationsveränderliche erscheint. Das bedeutet, daß wir die Abweichungen der Schüsse in wahrscheinlichen Abweichungen messen. Dementsprechend ändern sich die Integrationsgrenzen, das Integral ist nun von $-\frac{a}{r}$ bis $+\frac{a}{r}$ zu erstrecken. (Es sollen hier nur symmetrisch zum mittleren Treffpunkt gelegene Bereiche betrachtet werden.) Die Wahrscheinlichkeit, daß $\frac{x}{a}$ die Grenzen $-\frac{a}{r}$ und $+\frac{a}{r}$ nicht überschreitet (d. h., daß der Bereich zwischen $-a$ und $+a$ getroffen wird), ist dann, da $dx = r \cdot d\left(\frac{x}{r}\right)$

$$W = \frac{h \cdot r}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{a}{r}}^{+\frac{a}{r}} e^{-\left(h \cdot r\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2} \cdot d\left(\frac{x}{r}\right)$$

oder, da es sich um eine gerade Funktion handelt:

$$W = \frac{2 h \cdot r}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{r}} e^{-\left(h \cdot r\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2} \cdot d\left(\frac{x}{r}\right)$$

$h \cdot r$ hat (s. S. 90) den festen Wert 0,4769.

In dieser Form gibt das Integral die Treffwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\frac{a}{r}$ an. Es läßt sich für jeden Wert von $\frac{a}{r}$ durch Reihenentwicklung zahlenmäßig ausrechnen.

Die Größe $\frac{a}{r}$ nennt man den „Wahrscheinlichkeitsfaktor“. Er gibt an, das Wievielfache der wahrscheinlichen Abweichung (r) eine vorgegebene Abweichung a ist, oder (in der dem Artilleristen geläufigen Form) das Wievielfache der 50%igen Streuung ein Gebiet ist, das die Ausdehnung $2a$ hat, und das den mittleren Treffpunkt als Mittelpunkt enthält. Diese beiden Ausdrucksweisen sagen genau dasselbe; bei der zweiten sind lediglich Zähler und Nenner doppelt so groß wie bei der ersten.

Die Schußtafeln enthalten ausgerechnete Werte der zuletzt aufgeführten Form des Gaußschen Fehlerintegrals, also der Treffwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Wahrscheinlichkeitsfaktor. Dabei sind die Werte der Funktion W , da der Artillerist die Wahrscheinlichkeit in Prozenten mißt, noch mit 100 vervielfacht. Die Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren endet mit dem Wertepaar: 4,20 (=Wahrscheinlichkeitsfaktor) entspricht 100% (=Treffwahrscheinlichkeit). [Genauer wäre: 99,539%; wie schon gesagt, sind theoretisch Abweichungen jeder Größe möglich. Ihre Wahrscheinlichkeit wird aber schnell verschwindend klein, wenn der Wahrscheinlichkeitsfaktor den Wert 4,2 überschreitet. So beträgt z. B. beim Wahrscheinlichkeitsfaktor 5,3 die theoretische Treffwahrscheinlichkeit 99,965%, d. h., die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schuß um mehr als den 5,3-fachen wahrscheinlichen Fehler abweicht, ist nur 0,035%. Für die Praxis des Schießens ist diese Genauigkeit völlig bedeutungslos.]

Als Faustregel für die Treffwahrscheinlichkeit kann, etwa bis zum Wahrscheinlichkeitsfaktor 1,4 (also für Zielausdehnungen unter der anderthalbfachen 50%igen Streuung) gelten:

Treffwahrscheinlichkeit in $\%$ \approx 50mal Wahrscheinlichkeitsfaktor. (Man überprüfe diese Regel an Beispielen aus der Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren. Dabei zeigt sich eine besonders gute Übereinstimmung in der Gegend des Wahrscheinlichkeitsfaktors 1,00.)

* Man ersetzt hierbei die Wahrscheinlichkeitsfunktion, also die Integralkurve der Gaußschen Fehlerkurve, durch eine Gerade. Kurve und Gerade haben den Nullpunkt und den Punkt Wahrscheinlichkeitsfaktor = 1, $W = 50\%$ gemeinsam.

Einer außerhalb Deutschlands vielfach üblichen Schießregel (s. S. 105, Mitte) liegt diese Faustregel zugrunde.

Es sei auch an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß alle Treffwahrscheinlichkeitsberechnungen zunächst für Bereiche, die symmetrisch zum mittleren Treffpunkt liegen, durchgeführt werden. Die Treffwahrscheinlichkeit für andere Bereiche, die den mittleren Treffpunkt nicht als Mittelpunkt enthalten, findet man durch Subtrahieren der Treffwahrscheinlichkeiten entsprechend gewählter Bereiche der ersten Art. (siehe z. B. das Ermitteln der „wahrscheinlichsten Aufsatzänderung“ auf S. 104).

Alles bisher über die Trefferverteilung nach der Länge Ausgeführte gilt, sinngemäß abgewandelt, auch für die Verteilung nach der Breite. (Über die Größenordnungen der Längen- und Breitenstreuung s. S. 79.) Bisher war nur von der Entfernung des mittleren Treffpunktes die Rede; dazu tritt als dessen zweite Koordinate die seitliche Lage, die sich als arithmetisches Mittel der seitlichen Lagen aller Einzelschüsse ergibt. Teilt man ein Treffbild aus sehr vielen Schüssen, das der Gaußschen Verteilung entspricht, vom mittleren Treffpunkt aus in Richtung der Treffbildachsen fortschreitend, in Rechtecke von der Länge $l_{50}/2$ und der Breite $b_{50}/2$, so erhält man folgendes schematische Bild der Trefferverteilung in Prozenten der Gesamtschußzahl (in runden Werten).

	15%	7%	16%	25%	25%	16%	7%	15%
15%	0,02	0,10	0,24	0,37	0,37	0,24	0,10	0,02
7%	0,10	0,49	1,12	1,75	1,75	1,12	0,49	0,10
16%	0,24	1,12	2,56	4,0	4,0	2,56	1,12	0,24
25%	0,37	1,75	4,00	6,25	6,25	4,00	1,75	0,37
25%	0,37	1,75	4,00	6,25	6,25	4,00	1,75	0,37
16%	0,24	1,12	2,56	4,0	4,0	2,56	1,12	0,24
7%	0,10	0,49	1,12	1,75	1,75	1,12	0,49	0,10
15%	0,02	0,10	0,24	0,37	0,37	0,24	0,10	0,02

} 50%
 } 82%
 } 99%

} 50%
 } 82%
 } 99%

Bild 35: Prozentuale Verteilung der Schüsse eines Treffbildes bei sehr großer Schußzahl („Gauß'sche Verteilung“).

Dieses Bild der Trefferverteilung kann man dazu benutzen, die Treffwahrscheinlichkeit gegen ein unregelmäßig begrenztes Ziel, das eine beliebige Lage zum mittleren Treffpunkt hat, zu ermitteln. Man zeichnet sich hierzu ein Trefferverteilungsbild, in dem l_{50} und b_{50} im gleichen Maßstab verkleinert sind (d. h. im richtigen Längenverhältnis zueinander stehen), und beschriftet es entsprechend Bild 35. Dann zeichnet man in demselben Maßstab das Ziel auf eine Pause. Legt man diese Pause auf das Trefferverteilungsbild auf, so lassen sich die auf das Ziel entfallenden Trefferprozent leicht auszählen.

Bei der Aufstellung des obigen Trefferverteilungsbildes wird — ebenso wie bei der Berechnung der Treffwahrscheinlichkeit für ein Ziel von beschränkter Länge und Breite — folgender Satz benutzt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mehrere, voneinander unabhängige Ereignisse zusammen (gleichzeitig oder nacheinander) eintreffen, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten, die für das Eintreffen jedes dieser Ereignisse, einzeln für sich, bestehen. Der Satz wird anschaulich am Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel auf einen Wurf eine 6 zu werfen, beträgt $1/6$. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf zwei Sechsen zu werfen, ergibt sich nach obiger Regel zu $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Denselben Wert erhält man auch, indem man die Zahl der günstigen Fälle (nur die eine Zusammenstellung 6 und 6) durch die Zahl aller möglichen Fälle (im ganzen 36 verschiedene Zusammenstellungen) teilt. Beträgt also für einen der Breite nach nicht beschränkten Streifen quer zur Schußrichtung die Treffwahrscheinlichkeit 16%, für einen der Länge nach nicht beschränkten, in der Schußrichtung verlaufenden Streifen 7%, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl der Längs- als auch gleichzeitig der Querstreifen getroffen wird $\frac{16}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{1,12}{100}$. Dieser Wert, d. h. 1,12%, gibt also die Treffwahrscheinlichkeit für das Rechteck an, das die beiden Streifen gemeinsam haben.

IV. Der Fehler des mittleren Treffpunktes.

Im allgemeinen ist auch der mittlere Treffpunkt eines Treffbildes oder einer Reihe von Schüssen selbst mit Ungenauigkeiten (Fehlern) behaftet. Zur Erklärung diene folgende Überlegung: Könnte man eine große Zahl von Treffbildern von jeweils derselben, beschränkten Schußzahl unter genau gleichbleibenden Verhältnissen schießen, so würde man doch feststellen, daß die mittleren Treffpunkte dieser Einzeltreffbilder im allgemeinen nicht zusammenfallen, sondern ihrerseits um denjenigen Punkt streuen, den man nach Zusammenfassung aller Einzeltreffbilder zu einem einzigen Treffbild von überaus großer Schußzahl als mittleren Treffpunkt erhalten würde. Diesen letztgenannten Punkt bezeichnet man als den wahren mittleren Treffpunkt. Die Streuung der mittleren Treffpunkte der Einzeltreffbilder entspricht in ihrer Gesetzmäßigkeit durchaus der schon besprochenen Streuung der Einzelschüsse. Es leuchtet ein, daß sie im allgemeinen um so kleiner sein wird, aus je mehr Schüssen sich die betrachteten Einzeltreffbilder aufbauen.

Daß der mittlere Treffpunkt einer beschränkten Schußzahl nicht mit dem wahren mittleren Treffpunkt, der sich erst aus einer über alle Maßen großen Schußzahl ergeben würde, zusammenfällt, zeigt folgende Überlegung: Zu einem schon bestehenden Treffbild trete ein weiterer Schuß. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß dieser neue Schuß genau den mittleren Treffpunkt der bisherigen Schüsse trifft. Sowie das aber nicht der Fall ist, fällt der mittlere Treffpunkt, der sich nach Einrechnung des neuen Schusses ergibt, nicht mit dem bisherigen zusammen. Jeder weitere Schuß verschiebt also die Lage des mittleren Treffpunktes, wenn auch diese Verschiebungen mit wachsender Schußzahl immer kleiner werden. Ein Treffbild wird aber nach einer beschränkten Schußzahl abgebrochen. Man ist also gezwungen, den mittleren Treffpunkt, der sich aus dieser Schußzahl ergibt, an Stelle des unbekanntenen wahren mittleren Treffpunktes anzunehmen.

Hierbei wird ein Fehler gemacht, über dessen Größe die Wahrscheinlichkeitsrechnung gewisse Angaben gestattet. Unter dem wahrscheinlichen Fehler oder der wahrscheinlichen Abweichung des mittleren Treffpunktes (r_T) versteht man diejenige Abweichung des mittleren Treffpunktes vom wahren mittleren Treffpunkt, die — entsprechend der wahrscheinlichen Abweichung des

Einzelschusses — bei sehr vielen Treffbildern gleicher Art ebenso oft über- wie unterschritten wird, oder die mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ überschritten wird. Es läßt sich zeigen, daß diese wahrscheinliche Abweichung gleich ist der wahrscheinlichen Abweichung (r) des Einzelschusses, geteilt durch die Wurzel aus der Schußzahl (n) des Treffbildes. Also:

$$r_T = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{l_{50}}{2 \sqrt{n}}$$

Beispiel: Ein Geschütz hat eine Reihe von 6 Schüssen abgegeben. Die 50%ige Längsstreuung, auf der betreffenden Entfernung beträgt 40 m, die wahrscheinliche Abweichung des Einzelschusses also 20 m. Die wahrscheinliche Abweichung des mittleren Treffpunktes der Reihe vom wahren mittleren Treffpunkt ergibt sich zu $\frac{20}{\sqrt{6}} \approx 8$ m.

Im übrigen wird oft auch dann kurzweg vom „mittleren Treffpunkt“ gesprochen, wenn es sich, streng genommen, um den wahren mittleren Treffpunkt handelt. Das ist natürlich nur dann erlaubt, wenn es nicht zu Mißverständnissen oder Verwechslungen führen kann.

V. Schüsse mit ungewöhnlich großen Abweichungen, Gesamtausdehnung des Treffbildes.

Wie schon ausgeführt, läßt zwar die Theorie die Möglichkeit sehr großer Abweichungen zu, die Wahrscheinlichkeit hierfür ist aber so klein, daß sie von einem gewissen Betrage ab praktisch gleich Null gesetzt werden kann. Es zeigt sich auch in der Praxis, daß Abweichungen über eine gewisse Grenze hinaus überhaupt nicht vorkommen, wenn Ladung, Richtung usw. einwandfrei richtig sind. Tritt nun eine sehr große Abweichung tatsächlich auf, so liegt es nahe, anzunehmen, daß irgendein grundsätzlicher Fehler (falsche Ladung, falsche Erhöhung, Lösen der Haube vom Geschöß oder dergl.) vorliegen muß. Ein solcher Schuß wäre dann, wenn es sich darum handelt, die wahre Streuung eines Geschützes zu ermitteln, von der Verrechnung auf das Treffbild auszuschließen.

Es sind verschiedene Regeln aufgestellt worden, die die Grenze angeben, jenseits welcher ein Schuß als „Ausreißer“ anzusehen ist. Bei der Aufstellung solcher Regeln kommt man nicht ohne gewisse willkürliche Annahmen aus. Auf Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden.

Die gebräuchlichen Ausreißerregeln setzen diese Grenze so fest, daß sie mit wachsender Schußzahl weiterrückt, so daß es z. B. möglich ist, daß ein Schuß, der bei 10 Schüssen als Ausreißer zu gelten hat, bei 20 Schüssen zum Treffbild gehört. (Eine Ausnahme macht die einfachste Ausreißerregel, die einen Schuß dann ausschließt, wenn er außerhalb des Gebietes der 4fachen 50%igen Streuung fällt.) Die Annahme einer solchen, mit der Schußzahl wachsenden Schranke entspricht durchaus der Erfahrung. Es hat sich nämlich beim Schießen großer Treffbilder stets erwiesen, daß die Gesamtausdehnung eines Treffbildes im allgemeinen mit der Schußzahl wächst, d. h. daß in der Mehrzahl der Fälle die äußersten Streuungsschüsse nicht gleich zuerst fallen (gleiche Verhältnisse innerhalb des Treffbildes wie immer vorausgesetzt; der Rohranwärmer gehört nicht zum Treffbild). Diese Tatsache kann man durch folgenden Gedankengang anschaulich machen bzw. mit dem auf S. 87 über die Trefferverteilung Gesagten in Einklang bringen: Die „Substanz“ eines Treffbildes von wenigen Schüssen liegt nicht in beliebig verteilter Form vor, sondern sie ist auf einzelne bestimmte Punkte sozusagen zusammengeballt. Wir dürfen aber annehmen, daß für ein Treffbild auch bei kleiner Schußzahl die Verteilung nach der Gaußschen Kurve die wahrscheinlichste ist, und daß wiederum kleine Abweichungen von ihr wahrscheinlicher sind als große. Wenn also diejenigen Punkte, an denen sich die nicht mehr unterteilbaren Bruchteile eines Treffbildes zusammenballen, d. h. die einzelnen Aufschläge, zunächst dorthin fallen, wo die Fehlerkurve eine gewisse Ordinatenhöhe aufweist, während die flachen Zipfel vorerst noch unbesetzt bleiben, so weicht diese Verteilung von der Gaußschen Idealverteilung erheblich weniger ab als z. B. eine solche, bei der zuerst die Zipfel der Fehlerkurve besetzt werden; sie wird deshalb auch häufiger eintreten als die letztere.

Der Sachverhalt läßt sich, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfaktoren, auch zahlenmäßig erfassen (s. Bild 36); die Rechnung ist für ein Treffbild von 6 Schüssen durchgeführt.

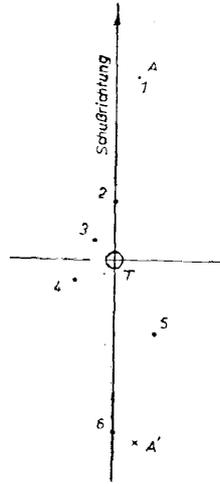


Bild 36: Zur Gesamtausdehnung eines Treffbildes von 6 Schüssen.

Man ermittelt im Treffbild denjenigen Schuß (Schuß A), der die größte Längenabweichung vom mittleren Treffpunkt hat — natürlich kann das nur entweder der weiteste oder der kürzeste Schuß sein —, und spiegelt ihn an der zur Schußrichtung senkrechten Achse des Treffbildes, d. h., man legt auf die andere Seite des mittleren Treffpunktes einen Punkt, dessen Längenabweichung bei gleicher Größe das entgegengesetzte Vorzeichen des Schusses A hat. Dieser Punkt sei A'.

A und A' grenzen zusammen einen Bereich ein, der der Länge nach die 5 anderen Schüsse, also = 83,3% aller abgegebenen Schüsse aufnimmt. Die Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren gibt hierzu den Wert 2,03 an. Da der Bereich zwischen A und A' mindestens gleich der Gesamtausdehnung des Treffbildes ist, können wir sagen, daß diese Ausdehnung bei 6 Schüssen etwa gleich der 2fachen l_{50} ist. (Eine genauere Angabe wäre bei der kleinen Schußzahl sinnlos.)

Auf Grund von Erfahrung und Rechnung läßt sich über den Zusammenhang zwischen der Gesamtausdehnung eines Treffbildes und der Schußzahl folgendes angeben:

Die Gesamtausdehnung eines Treffbildes übersteigt erst bei etwa 100 Schüssen knapp die 4fache 50%ige Streuung. Bei 6 Schüssen beträgt sie ungefähr das Doppelte, bei 12 Schüssen ungefähr das 2 $\frac{1}{2}$ fache, bei 30 Schüssen ungefähr das 3fache der 50%igen Streuung (s. z. B. das Treffbild auf S. 91, das tatsächlich erschossen ist). Diese Zahlen sind um so unsicherer, aus je weniger Schüssen das Treffbild besteht.

Die 50%ige Streuung selbst ist zwar — ebenso wie die anderen Streuungsmaße — bis zu einem gewissen Grade von der Schußzahl unabhängig, die Genauigkeit, mit der sie bestimmt ist, nimmt aber mit kleiner werdender Schußzahl ab.

VI. Zusammensetzung von Streuungen.

Wirken auf einen Vorgang mehrere, voneinander unabhängige Fehlerursachen gemeinsam ein, so bewirken sie zusammen den wahrscheinlichen Fehler:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}$$

Dabei sind r_1 bis r_n diejenigen wahrscheinlichen Fehler, die zustande kämen, wenn die n Streuungsursachen einzeln, jeweils für sich allein, ihren Einfluß ausüben würden. Da die l_{50} ebenso wie w und d , zu r proportional sind, so gilt die obige Gleichung genau so auch für diese Streuungsmaße.

1. Beispiel: Die Streuung einer Batterie ist stets größer als die eines Geschützes. Das ist darauf zurückzuführen, daß es praktisch unmöglich ist, die mittleren Treffpunkte der einzelnen Geschütze ganz genau auf die gleiche Entfernung zu legen. (Schon allein die nicht zu vermeidenden Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Grundstufbedingungen Abweichungen.) Der Streuung des Einzelgeschützes überlagert sich also die Streuung der mittleren Treffpunkte aller Geschütze. Im deutschen Heer rechnet man mit einer Streuung der ganzen Batterie, die $1\frac{1}{2}$ mal so groß ist wie die eines Geschützes. Was für eine Aussage über die Größe der Streuung der mittleren Treffpunkte der Geschütze steckt in diesem Faktor?

Ist l_B die 50%ige Streuung der Batterie, l_G die des Geschützes, l_T die der mittleren Treffpunkte der Geschütze, so gilt:

$$l_B = \frac{3}{2} l_G = \sqrt{l_G^2 + l_T^2}$$

Woraus folgt:

$$l_T = \sqrt{\frac{5}{4} l_G^2} \approx l_G$$

Tatsächlich liegt der Festsetzung des Faktors $1\frac{1}{2}$ die Erfahrung zugrunde, daß man die Streuung der mittleren Treffpunkte der Geschütze als ebenso groß annehmen kann, wie die Streuung des Einzelgeschützes.

2. Beispiel: Die l_{50} einer Batterie betrage auf 10 000 m Entfernung 90 m. In dieser Batterie werde bei einem Schießen ungenau gerichtet, und zwar sollen die dadurch hervorgerufenen Entfernungsfehler nach oben und unten bei der Hälfte aller Schüsse 25 m erreichen oder überschreiten (d. h. wahrscheinlicher Fehler = 25 m). Um wieviel wird dadurch die Streuung vergrößert?

$$l_{50} = \sqrt{90^2 + 50^2} \approx 103 \text{ m}$$

Infolge des schlechten Richtens wächst also die Streuung um über 14% ihres Wertes an.

Als besonders wichtig werde festgehalten: Es ist durchaus falsch, irgendeine Fehlerquelle mit der Begründung zu vernachlässigen, die dadurch hervorgerufenen Abweichungen seien kleiner als die Streuung oder der Fehler „liege ja doch innerhalb der Streuung“.

Tatsächlich wird durch jede neu hinzutretende Fehlerursache die schon vorhandene Streuung vergrößert.

F. Einiges über Einschießregeln.

I. Allgemeines.

Wichtig ist: Im Folgenden werden Schießregeln besprochen und nach der Wahrscheinlichkeitslehre begründet, nicht etwa Schießregeln aufgestellt! Die Ausführungen sind allgemeingültig, also nicht auf deutsche Verhältnisse oder Vorschriften beschränkt. Da der Inhalt dieses Abschnittes sich auf die Wahrscheinlichkeitslehre stützt, ist die Kenntnis des vorhergehenden Abschnittes C für das weitere Verständnis notwendig.

Dem Wirkungsschießen geht — abgesehen vom reinen Planschießen — ein Einschießen voraus. Dieses Einschießen hat den Zweck, den mittleren Treffpunkt, für den ja die Wahrscheinlichkeit, getroffen zu werden, am größten ist, dem Ziel oder irgend einem anderen Punkt, dessen Lage zum Ziel bekannt ist, nach Möglichkeit zu nähern. Hierbei wird — wenn man eine große Zahl von Einschießvorgängen betrachtet — dasjenige Schießverfahren am sparsamsten, bzw. bei gegebenem

Munitionsaufwand am genauesten zum Ziele führen, das mit den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit am meisten in Einklang steht. Der Schießende kann aber auf dem Gefechtsfeld keine wahrscheinlichkeitstheoretischen Berechnungen anstellen. Man hat daher die verschiedenen Arten des Einschießens in mehr oder weniger feste Regeln gefaßt.

Diese Schießregeln müssen möglichst weitgehend folgenden Anforderungen entsprechen:

- 1.) Sie sollen nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit eine möglichst große Genauigkeit des Einschießens herbeiführen.
- 2.) Sie sollen dieses Ergebnis mit möglichst geringem Munitionsaufwand erreichen.
- 3.) Sie müssen allen taktischen Anforderungen, die auftreten können, jeder Zielart und jedem Verhalten des Ziels sowie etwaigen Besonderheiten des Beobachtungsmittels gerecht werden.
- 4.) Sie müssen einfach, schnell anzuwenden, leicht zu lehren und leicht zu merken sein.

Diese Forderungen widersprechen sich zum Teil, man muß also Zugeständnisse nach der einen oder der anderen Richtung hin machen. Dabei muß die Art des Ziels sowie die Besonderheit der Waffe berücksichtigt werden. So haben z. B. die Regeln für das Einschießen schwersten Steilfeuers auf Punktziele in erster Linie den Anforderungen 1.) und 2.), diejenigen für das Einschießen leichter Geschütze vorwiegend den Anforderungen 3.) und 4.) gerecht zu werden.

Die nachstehenden Ausführungen beschränken sich auf das genaue Einschießen des Einzelgeschützes. Hierbei geben in erster Linie die Forderungen der Wahrscheinlichkeitslehre den Ausschlag. Andere Schießverfahren gehen im wesentlichen daraus durch vereinfachende Änderungen, die auf Grund der Forderung 3.) nötig sind, hervor. [So ist z. B. das Einschießen mit Mitteln der Beobachtungsabteilung, die zeitlich nicht unbeschränkt zur Verfügung stehen, als Sonderfall des nachstehend unter a) beschriebenen Verfahrens auszufassen. Der erste Teil besteht hierbei im allgemeinen nur aus einem Schuß und der hierauf folgenden Aufsatzänderung.]

II. Einschießen nach der Länge.

Für das genaue Einschießen nach der Länge ist zu unterscheiden, ob die Lage der Schüsse zum Ziel

- a) dem Betrage nach gemessen werden kann, oder
- b) nur dem Vorzeichen nach (Kurz- oder Weitlage) anzusprechen ist.

Im Falle a) ist ein sparsameres und genauer zum Ziel führendes Schießverfahren möglich als im Falle b).

Grundsätzlich zerfällt jedes genaue Einschießen in zwei Teile. Im ersten Teil wird, im allgemeinen nach einzelnen Schüssen, die Aufsatzentfernung (Erhöhung) so lange geändert, bis ein Anhalt für eine Aufsatzentfernung gewonnen ist, bei der das Ziel innerhalb der Streuentfernung eines Treffbildes, bzw. einer Reihe von Schüssen, liegt.

Im zweiten Teil wird, auf der so ermittelten Entfernung beginnend, eine Reihe oder mehrere Reihen von Schüssen abgegeben. Dabei wird, nötigenfalls durch weitere Änderungen, diejenige Aufsatzentfernung ermittelt, die den mittleren Treffpunkt dem Ziel möglichst nahe bringt.

Im Falle a) ist das Ausmessen der Lage der Einzelschüsse, wenn es durch Winkelmessung gegen das Ziel erfolgt, um so genauer, je näher die Schüsse am Ziel liegen. Auch im Falle b) kann der mittlere Treffpunkt (aus dem Verhältnis der Kurz- und Weitschüsse) um so genauer ermittelt werden, je näher dem Ziel er sich befindet (s. S. 106). Außerdem wirken sich — das gilt für beide Fälle — bei nicht schußtafelmäßigen Verhältnissen kleine Aufsatzänderungen genauer aus als große. Es ist daher anzustreben, daß der zweite Teil des genauen Einschießens, das Reiheschießen, seinerseits auf einer Aufsatzentfernung beginnt, die der richtigen schon möglichst nahe kommt. Wird das erreicht, dann besteht auch schon beim Reiheschießen von Anfang an eine gewisse Trefferaussicht.

Der zweite Teil des genauen Einschießens geht in das Wirkungsschießen über.

a) Einschießen auf Grund gemessener Abstände der Schüsse vom Ziel.

v) Ein Verfahren für den ersten Teil des genauen Einschießens.

Es wird angenommen, daß das Beobachtungsmittel dauernd zur Verfügung steht und daß bei der Messung der Abstände (der Begriff „Abweichung“ bezieht sich auf den mittleren Treffpunkt, dieses Wort ist deshalb hier zu vermeiden) der Schüsse vom Ziel nur solche Fehler zu erwarten sind, die klein sind gegenüber der Längsstreuung des Geschützes. In diesem Falle ist folgendes Schießverfahren zweckmäßig:

Es wird nach dem ersten Schuß um den ganzen gemessenen Abstand geändert, nach dem zweiten, nach dieser Verbesserung abgegebenen Schuß um die Hälfte des bei diesem Schuß gemessenen Abstandes, nach dem dritten Schuß um ein Drittel usw.

Das Wesentliche dieses Schießverfahrens ist folgendes:

Die Änderung der Aufsatzentfernung erfolgt jedesmal auf Grund der Abweichung, die der mittlere Treffpunkt aller bisher abgegebenen Schüsse vom Ziel hätte, wenn alle Schüsse mit derselben Erhöhung, nämlich der des letzten Schusses, abgegeben wären. Liegt z. B. (s. Bild 37) der Schuß 1 um die Strecke a weit, so wird um a abgebrochen. Wenn der Schuß 1 mit der neuen Erhöhung, aber unter genau denselben Streuungseinflüssen (v_0 , Abgangsrichtung, genauer Wind usw.), die beim ersten Mal vorlagen, wiederholt werden könnte, so müßte er jetzt im Ziel liegen (Schuß 1').

Es wird nun Schuß 2 abgegeben. Er liege um b kurz. Der mittlere Treffpunkt von Schuß 1' und 2 liegt also um $b/2$ kurz, um diesen Betrag wird geändert.

[Allgemein: Der mittlere Treffpunkt von n Schüssen liege im Ziel. Ein neu dazu kommender, $(n + 1)$ ter Schuß habe den Abstand x vom Ziel. Dann findet man die Lage des neuen mittleren Treffpunktes, indem man x zur Summe (gebildet mit Verrechnung der Vorzeichen) der Zielabstände der ersten n Schüsse zuzählt und das Ergebnis durch die Gesamtschußzahl, also durch $(n + 1)$, teilt. Die Summe der Zielabstände der ersten n Schüsse ist aber in diesem Fall gleich Null, der neue mittlere Treffpunkt hat also den Zielabstand

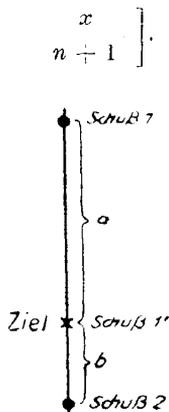


Bild 37: Zum Einschießen mit eingemessenen Schüssen.

Es können Gründe dafür sprechen, den ersten Schuß nicht mit in das Trefferbild, das die auf gleiche Erhöhung umgerechneten Schüsse darstellen, aufzunehmen, z. B. sehr großer Abstand dieses Schusses vom Ziel oder die Tatsache, daß bei dem betreffenden Geschütz der erste Schuß aus kaltem Rohr, der „Anwärmer“, unzuverlässig zu sein pflegt. In diesem Fall wird beim ersten und beim zweiten Schuß um den vollen gemessenen Zielabstand geändert; das Verfahren beginnt dann erst mit dem zweiten Schuß.

Das beschriebene Schießverfahren führt, gutes Beobachten vorausgesetzt, besonders rasch zum Ziel. Die notwendigen Änderungen werden sehr schnell klein.

Unter der Annahme, daß die Beobachtung völlig fehlerfrei ist, und daß sich jede Aufsatzänderung auf die mittlere Flugbahn genau im gewünschten Maße auswirkt, ist der wahrscheinliche Fehler des mittleren Treffpunktes nach n Schüssen wie beim normalen Treffbild

$$r_T = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{l_{50}}{2\sqrt{n}}$$

In der Hälfte aller Fälle wird also (unter den aufgeführten günstigen Voraussetzungen) der Fehler, mit dem das Einschußergebnis noch behaftet ist, nach der Änderung, die auf Grund des vierten Schusses erfolgt, unter einem Viertel der 50%igen Streuung liegen. Tatsächlich sind aber die genannten günstigen Bedingungen bestenfalls bei Schüssen in Zield Nähe annähernd erfüllt. Der angegebene Wert für den wahrscheinlichen Fehler des mittleren Treffpunktes stellt also einen Mindestwert dar, der in der Praxis nicht ganz erreicht werden kann.

β) Der zweite Teil des genauen Einschießens, gleichzeitig der Beginn des Wirkungsschießens.

In Wirklichkeit ist, was die Genauigkeit, mit der der mittlere Treffpunkt bestimmt ist, anbetrifft, ein Treffbild, dessen Einzelschüsse in der beschriebenen Art theoretisch auf ein- und dieselbe Erhöhung umgerechnet sind, einem solchen, das tatsächlich mit einer Erhöhung geschossen ist, nicht gleichwertig. Man setzt daher das oben beschriebene Schießverfahren nur bis zu einer gewissen Annäherung an das Ziel, bzw. bis zu einer gewissen Zahl von Einschießschüssen, fort (als ersten, schon sehr nahe zum Ziele führenden Teil des genauen Einschießens), um dann als zweiten Teil ein Treffbild mit einer Erhöhung abzugeben, die sich nicht mehr von Schuß zu Schuß ändert.

Sollte sich hiernach noch eine Änderung als notwendig herausstellen, so erfolgt sie schon wegen der möglichen Änderung der Witterungseinflüsse zweckmäßigerweise auf Grund der Lage des mittleren Treffpunktes dieser Reihe. (Dabei ist aber das weiter unten über kleine Änderungen Gesagte zu beachten.)

Über die Genauigkeit, die im zweiten Teil dieses genauesten Einschießverfahrens erreichbar ist, läßt sich folgendes angeben: Man kann beim Einschießen mit einer beschränkten Zahl von Schüssen nicht erwarten, daß der wahre mittlere Treffpunkt (s. S. 94) genau die beabsichtigte Lage hat. Man muß sich mit dem mittleren Treffpunkt aus einer beschränkten Schußzahl begnügen. Dieser mittlere Treffpunkt stellt den wahrscheinlichsten Wert für den unbekanntenen wahren mittleren Treffpunkt dar. Man stellt also im günstigsten Fall, d. h. bei fehlerfreiem Einmessen der Schüsse, die wahrscheinlichste Aufsatzentfernung zum Ziel fest. Der wahrscheinliche Fehler des mittleren Treffpunktes (r_T , s. S. 100 oben) gestattet es, die Genauigkeit abzuschätzen, mit der dies möglich ist. Diese Genauigkeit des Einschießens ist umgekehrt proportional r_T , sie wächst also mit der Quadratwurzel aus der Zahl der Schüsse, auf denen sich die Feststellung der wahrscheinlichsten Aufsatzentfernung aufbaut.

γ) Die kleinste noch sinnvolle Aufsatzänderung.

Im Zusammenhang mit dem hier besprochenen Schießverfahren steht die Frage nach der kleinsten Aufsatzänderung, die auf Grund der Einmessung eines Einzelschusses oder auf Grund der Lage des mittleren Treffpunktes eines eingemessenen Treffbildes noch sinnvoll ist. Hierzu läßt sich zunächst folgendes zeigen: Hat ein Einzelschuß oder der mittlere Treffpunkt eines Treffbildes einen Zielabstand von der Größe des wahrscheinlichen Fehlers (d. h. r , bzw. beim Treffbild r_T), so wird durch eine Aufsatzänderung um diesen Betrag die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, nur in 63% aller Fälle vergrößert, in den übrigen 37% aller Fälle jedoch verkleinert.

(Es sei dem Leser empfohlen, den Beweis hierfür, zu dem nur die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsfaktoren notwendig ist, zur Übung durchzuführen. Anleitung: Man nimmt zunächst an, der eingemessene Schuß liege in der Streuung so, daß der zugehörige wahre mittlere Treffpunkt sich gerade in der Mitte zwischen dem Schuß und dem Ziel, d. h. auf dem halben gemessenen Zielabstand, befindet. In diesem Falle verlegt eine Aufsatzänderung um den gemessenen Zielabstand den wahren mittleren Treffpunkt so, daß er zwar auf die andere Seite des Ziels zu liegen kommt, daß aber der Betrag seines Abstands vom Ziel und damit auch die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, ungeändert bleibt.)

Ist der gemessene Zielabstand kleiner als r , bzw. r_T , so besteht eine noch geringere Wahrscheinlichkeit, durch eine Aufsatzänderung von der Größe des Zielabstandes die Trefferaussicht zu verbessern. Es hat also wenig Sinn, die Aufsatzentfernung um einen Betrag zu ändern, der kleiner ist als r , bzw. r_T , auch wenn die Unterteilung des Aufsatzes eine solche Änderung ermöglichen sollte, und die Genauigkeit der Beobachtung für sie zu sprechen scheint.

Dazu kommt noch ein weiterer Gesichtspunkt: Selbst wenn es möglich wäre, durch eine Aufsatzänderung, deren Ausmaß unter dem wahrscheinlichen Fehler des Einzelschusses (d. h. unter $l_{50/2}$) liegt, den wahren mittleren Treffpunkt genau ins Ziel zu verlegen, so würde dadurch die Treffwahrscheinlichkeit nicht mehr wesentlich verbessert.

[Liegt z. B. der wahre mittlere Treffpunkt um $r/2$ vom Ziel entfernt, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß das Ziel getroffen wird, zum günstigsten überhaupt möglichen Wert der Treffwahrscheinlichkeit (wahrer mittlerer Treffpunkt im Ziel) wie die Ordinate der Fehlerkurve bei $x = r/2$ zur Ordinate bei $x = 0$ (s. Bild 34). Dieses Verhältnis ist 94,4 zu 100. Die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, könnte also im vorliegenden Falle nur um 6% ihres Wertes gesteigert werden. Liegt jedoch der wahre mittlere Treffpunkt um r vom Ziel ab, so verbessert eine Aufsatzänderung um diesen Betrag die Trefferaussicht immerhin von 79,6 auf 100, d. h. um rund 26% ihres Wertes.]

Außerdem hat in Wirklichkeit sowohl die Genauigkeit der Beobachtungen als auch die Feinheit der Unterteilung des Aufsatzes ihre Grenzen. Aus allen diesen Gründen ist es im allgemeinen nicht zweckmäßig, Änderungen unter der halben l_{50} vorzunehmen. Das gilt natürlich auch für Aufsatzänderungen, die auf Grund des Vorzeichenverhältnisses einer Reihe (s. S. 105 und 106) erfolgen.

b) Genaues Einschießen, wenn die Lage der Schüsse nur dem Vorzeichen nach anzusprechen ist.

a) Das Gabelschießen.

1. Einleitendes.

Bei der Mehrzahl aller Schießen, besonders bei solchen mit leichten Geschützen, wird von der Lage der Schüsse zum Ziel nur das Vorzeichen (Kurz- oder Weitschuß) festzustellen sein. Das genaue Einschießen geht dann, vor allem in seinem ersten Teil, wesentlich anders vor sich als unter a) beschrieben.

Im ersten Teil des Einschießens handelt es sich auch in diesem Fall darum, eine Aufsatzentfernung zu ermitteln, bei der das Ziel innerhalb der Streuentfernung eines Treffbildes, bzw. einer Reihe von Schüssen, liegt. Das ist dann der Fall:

- aa) wenn die „enge Gabel“ gegen das Ziel gebildet ist, d. h., wenn 2 genügend nahe zusammenliegende Aufsatzentfernungen ermittelt sind, von denen die kürzere mindestens einen Kurzschuß, die weitere mindestens einen Weitschuß ergeben hat. Über das Maß der engen Gabel, d. h. über den Entfernungs- oder Erhöhungsunterschied dieser beiden Aufsatzentfernungen wird noch Näheres ausgeführt.
- bb) wenn im ersten Teil des Einschießens eine Aufsatzentfernung einen Treffer ergibt. Der zweite Teil des Einschießens, das Reihenschießen, beginnt dann unmittelbar mit dieser Aufsatzentfernung, die ja das Ziel in ihrem Streubereich enthält.

cc) Wenn man mit einer Aufsatzentfernung Schüsse wechselnden Vorzeichens erhält. Auch für diese Aufsatzentfernung gilt das unter bb) Gesagte.

Die Zielabstände der Schüsse sind nicht bekannt; man ist also beim Einschießen auf ein Probieren angewiesen. Dieses Probieren, das in feste Regeln gefaßt und damit der Willkür weitgehend entzogen ist, geht so vor sich: Es wird das Vorzeichen des ersten Schusses festgestellt und daraufhin die Erhöhung kräftig (abgesehen von Sonderfällen, wie eigene Truppen in der Nähe des Ziels) geändert, bis das Ziel zwischen einem Kurz- und einem Weitschuß eingeschlossen ist, d. h., es wird die weite Gabel gebildet. Diese erste Aufsatzänderung ist von vornherein so zu bemessen, daß mit großer Wahrscheinlichkeit ein nochmaliges Ändern im gleichen Sinne vermieden wird. Dabei ist die Genauigkeit, mit der die Entfernung zum Ziel ermittelt werden kann, zu berücksichtigen. Im allgemeinen genügt als weites Gabelmaß das 4fache der letzten, angestrebten Gabel (d. h., der engen Gabel bzw. der 100-m-Gabel). Die weite Gabel wird nun durch fortgesetztes Halbieren, entsprechend dem Vorzeichen der beobachteten Schüsse, verengt.

[Dieses Halbieren geschieht auf Grund des Satzes: Ergibt eine Aufsatzentfernung Kurzschüsse, eine andere (nur so weit entfernte, daß die Streuungen noch als praktisch gleich gelten können) ebensoviel Weitschüsse, so ist die wahrscheinlichste Aufsatzentfernung zum Ziel die Mitte zwischen beiden. Aus demselben Grund beginnt auch das Reiheschießen auf Gabelmitte.]

Das beschriebene Verfahren („Gabeln“) führt in der Regel zu Fall aa), seltener zu Fall bb), bei solchen Schießregeln, die ein Nachprüfen der engen Gabel vorsehen, auch zu Fall cc) (s. S. 104).

2 Die Frage des Gabelmaßes. Das Auftreten falscher Gabeln.

Besonderer Überlegung bedarf die Frage, welches Maß der engen Gabel zweckmäßigerweise zu wählen ist. (Unter der „engen Gabel“ soll zunächst nur das letzte Gabelmaß, bis zu dem das Halbieren fortgesetzt wird, verstanden werden.) Bei der Festsetzung dieses Gabelmaßes sowie bei der Aufstellung der Regeln für das anschließende Reiheschießen muß man, wenn die Schießregeln allgemein gültig sein sollen, an die Streuung anknüpfen. Es kommt also vorerst (Einschränkung s. S. 103) ein bestimmtes, für alle Entfernungen gleiches Vielfaches der l_{50} als Gabelmaß in Frage, wobei noch näher geprüft werden muß, welches Vielfache zweckmäßig ist.

Gäbe es ein Geschütz mit verschwindend kleiner Streuung, dann läge kein Grund vor, mit dem Verfahren des fortgesetzten Halbierens an irgendeiner Stelle aufzuhören. Man müßte vielmehr, um das Ziel überhaupt zu erfassen, die Gabel so lange verengen, bis das Ziel im Wirkungsbereich mindestens des einen der beiden Gabelschüsse läge.

In Wirklichkeit ist aber diesem Verengen der Gabel durch das Auftreten falscher Gabeln eine Grenze gesetzt. Bei der Untersuchung der Möglichkeit falscher Gabeln soll von falschen Beobachtungen abgesehen und nur die Fälle betrachtet werden, in denen die Streuung die Gabel fälscht.

Beispiel für das Zustandekommen einer falschen Gabel: Gegen ein Ziel, dessen Lage genau der Aufsatzentfernung 5020 m entspricht, wird unter schußtafelmäßigen Verhältnissen die 100-m-Gabel gebildet. Hätte das Geschütz keine Streuung, dann würden die Schüsse mit den Aufsatzentfernungen 5000 und 5100 genau auf den entsprechenden Entfernungen im Gelände liegen. Tatsächlich liegen aber dort nur die mittleren Treffpunkte der Treffbilder, die man bei sehr vielen Schüssen auf diesen beiden Aufsatzentfernungen erhalten würde. Der mit der Aufsatzentfernung 5000 abgegebene Schuß liege nun in der Streuung so, daß seine Abweichung vom zugehörigen mittleren Treffpunkt ± 30 m beträgt. Er schlägt also bei 5030 auf, erscheint infolgedessen als Weitschuß und führt zur Annahme der falschen Gabel 4900 - 5000.

Die nachstehende Zusammenstellung gibt die Wahrscheinlichkeit einer falschen Gabel für einige Gabelmaße an. Dabei ist – entsprechend dem wirklichen Einschießvorgang – der Berechnung zugrunde gelegt, daß bei den Gabeln von $1 \cdot l_{50}$ und $2 \cdot l_{50}$ außer den Gabelschüssen noch je ein weiterer Schuß mit einer Aufsatzentfernung abgegeben ist, die noch um das jeweilige Gabelmaß über der oberen Gabelgrenze liegt.

Gabelmaß	Wahrscheinlichkeit einer falschen Gabel
$1 \cdot l_{50}$	49,2 %
$2 \cdot l_{50}$	29,0 %
$3 \cdot l_{50}$	15,0 %
$4 \cdot l_{50}$	7,5 %

Die Zusammenstellung zeigt, daß die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Gabel zu erhalten, mit dem Kleinerwerden des Gabelmaßes wächst und bei einer Gabel von $1 \cdot l_{50}$ schon praktisch $\frac{1}{2}$ ist.

Man wird aus diesem Grunde die Gabel nur so weit verengen, bis der Zweck des Gabelns, eine genügend genaue Unterlage für das Reiheschießen zu liefern, erfüllt ist. Zu fordern ist für das Reiheschießen, daß das Ziel, das zwischen weiter und kurzer Gabelgrenze liegt, sich auch innerhalb der zu erwartenden Gesamtausdehnung eines auf Gabelmitte geschossenen Treffbildes von (mindestens) 6 Schuß befindet. Bei 6 Schüssen — erst von dieser Zahl ab kann von einem Treffbild gesprochen werden — ist im allgemeinen mit einer Gesamtausdehnung des Treffbildes von etwa $2 \cdot l_{50}$ zu rechnen (s. S. 96). Liegt also (s. Bild 38) das Ziel innerhalb der mittleren Treffpunkte (T_k und T_w) zweier um $2 \cdot l_{50}$ auseinanderliegenden Aufsatzentfernungen (d. h., ist eine richtige Gabel vom Ausmaß $2 \cdot l_{50}$ gebildet), so liegt es auch im engeren Streubereich der Gabelmitte (T_R).

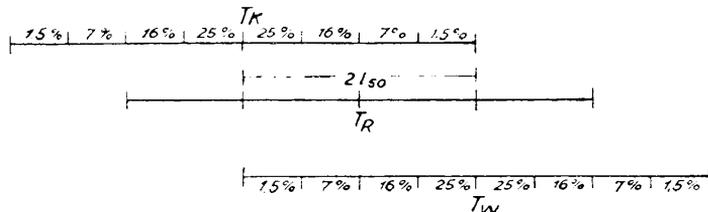


Bild 38: Zur Frage des Gabelmaßes.

Nach dieser einfachen Betrachtung ergibt sich die enge Gabel von der Ausdehnung $2 \cdot l_{50}$ als zweckmäßig. Bis zu diesem Maß empfiehlt es sich also, die Gabel zu verengen.

Es wurde schon ausgeführt, daß ein Gabelmaß, das ein bestimmtes Vielfaches der l_{50} darstellt, sich also mit der Entfernung ändert, den Forderungen der Wahrscheinlichkeitslehre am meisten entspricht. Ein solches Gabelmaß ist also dann am zweckmäßigsten, wenn die Rücksicht auf die Genauigkeit des Einschießens und auf die Sparsamkeit mit dem einzelnen Schuß (S. 98, Z. 1 u. 2) voransteht.

Gründe anderer Art (S. 98, Z. 4) sprechen dagegen — wenigstens bei der leichten Artillerie —, für ein auf allen Entfernungen gleiches, sogenanntes festes Gabelmaß. Die veränderliche, der Streuung angepaßte Gabel verlangt entweder Zusatzvorrichtungen, bzw. -teilungen am Aufsatz, oder sie bringt gegenüber einer festen Gabel vermehrte Rechenarbeit mit sich und vergrößert damit Zeitbedarf und Fehlermöglichkeiten bei der Kommandobildung. Es ist aber wichtig, daß die Schießregeln sich auch von weniger erfahrenen Schießenden rasch und fehlerfrei handhaben lassen. Eine auf Kosten dieser Forderung sehr weit getriebene Genauigkeit des Einschießens wird durch Art, Ausdehnung und Beweglichkeit der meisten Ziele der leichten Artillerie nicht gerechtfertigt; sie ist auch bei der im Verhältnis zur Streuung weitreichenden Splitterwirkung neuzeitlicher Sprenggeschosse in vielen Fällen nicht notwendig.

Wählt man aus den zuletzt genannten Gründen ein festes Gabelmaß, so muß dieses natürlich in der Größenordnung der doppelten l_{50} liegen.

Die 50%ige Längenausdehnung der Geschütze liegt im allgemeinen zwischen 1% und $\frac{1}{2}$ % der Schußweite (s. S. 79). Daraus ergibt sich, daß auf den Hauptkampferentfernungen der leichten Artillerie der runde Wert 100 m als grobe Näherung die theoretisch richtigere enge Gabel zu $2 \cdot l_{50}$ ersetzen kann. Im allgemeinen ist das Gabelmaß 100 m aber zu groß (vergl. die wirklichen Streu-

ungen der Geschütze), worauf bei den Regeln für das Reiheschießen geachtet werden muß (s. S. 107).

Es sind natürlich auch Zwischenlösungen zwischen fester, und veränderlicher Gabel möglich. So kann man z. B., solange die doppelte l_{50} unter 75 m liegt, als enge Gabel eine 50-m-Gabel bilden, darüber hinaus aber eine 100-m-Gabel.

3. Zum Nachprüfen der Gabel.

Eine Gabel von der Ausdehnung $2 \cdot l_{50}$ ist, wie sich berechnen läßt, mit der Wahrscheinlichkeit 29% falsch. Diese recht große Wahrscheinlichkeit kann dadurch herabgedrückt werden, daß man die Gabel durch je einen weiteren Schuß auf den beiden Gabelgrenzen nachprüft. Dabei können folgende Fälle auftreten:

- 1.) Die Gabel bestätigt sich, d. h., man erhält auf der weiten Gabelgrenze noch einen Weitschuß, auf der kurzen noch einen Kurzschuß. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Falles beträgt 61% (dieser Wert gilt ebenso wie die folgenden nur für das Gabelmaß $2 \cdot l_{50}$). Die nachgeprüfte Gabel ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% (gegen 71% bei der nicht nachgeprüften Gabel) richtig.
- 2.) Auf einer der beiden Gabelgrenzen ergeben sich wechselnde Vorzeichen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt auf der kurzen und der weiten Gabelgrenze jeweils 19,5%. Dieser Fall ist besonders günstig, da man das Reiheschießen, von dem man dann schon mindestens einen verwertbaren Schuß hat, nur fortzusetzen braucht.

Je mehr das Gabelmaß den Betrag $2 \cdot l_{50}$ überschreitet, desto weniger notwendig ist das Nachprüfen, da die Wahrscheinlichkeit der falschen Gabel sowieso kleiner ist, desto unwahrscheinlicher ist es auch, daß bei Nachprüfen der günstige und das Einschießen abkürzende Fall 2) eintritt. Das Nachprüfen der Gabel verliert also um so mehr seinen Sinn, je mehr das Maß der engen Gabel den Betrag $2 \cdot l_{50}$ überschreitet. (Die Bedeutung, die es bei jedem Gabelmaß als Sicherung gegen etwaige falsche Beobachtungen hat, wird hiervon natürlich nicht betroffen.)

β) Das Reiheschießen.

1. Ermittlung der theoretisch richtigen Aufsatzänderung aus dem Vorzeichenverhältnis einer Reihe.

Ist die enge Gabel gegen das Ziel gebildet, dann beginnt das Reiheschießen auf Gabelmitte (Grund s. S. 102). Für die folgenden theoretischen Untersuchungen ist zunächst vorausgesetzt, daß das Gabelschießen seine Aufgabe, das Ziel in die Streuentfernung der Gabelmitte zu bringen, erfüllt hat (d. h., daß die Schüsse der Reihe nicht alle dasselbe Vorzeichen haben), und daß die Unterteilung des Aufsatzes beliebige Änderungen gestattet. Im Gegensatz zum Schießen mit ausgemessener Schußlage muß im vorliegenden Fall die in Frage kommende Aufsatzänderung aus dem beobachteten Verhältnis der Kurz- und Weitschüsse ermittelt werden. Am genauesten würde das folgendermaßen geschehen. Man nimmt an, dasselbe Verhältnis von Kurz- und Weitschüssen, das in Wirklichkeit an einer beschränkten Schußzahl beobachtet ist, bestehe auch bei sehr großer Schußzahl, d. h. bei Gaußscher Verteilung der Schüsse. Unter dieser Annahme wird aus dem genannten Verhältnis nach der Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren der Abstand des mittleren Treffpunktes vom Ziel ermittelt. (s. das folgende Beispiel.) Er stellt den wahrscheinlichsten Wert für den Abstand des unbekanntem wahren mittleren Treffpunktes (s. S. 94) vom Ziel dar. Eine Änderung der Aufsatzentfernung um diesen Betrag ergibt also die „wahrscheinlichste Aufsatzentfernung“ zum Ziel (d. h. diejenige Aufsatzentfernung, bei der der wahre mittlere Treffpunkt am wahrscheinlichsten im Ziel liegt); die Änderung selbst heißt „wahrscheinlichste Aufsatzänderung“.

Beispiel für das Ermitteln der wahrscheinlichsten Aufsatzänderung: Von einer Reihe von 6 Schüssen sind 5 Weitschüsse, 1 Kurzschuß beobachtet, d. h., es liegen $\frac{1}{6} = 16,7\%$ der Schüsse kurz. Das Ziel (Z , s. Bild 39) liegt also vor dem mittleren Treffpunkt (T').

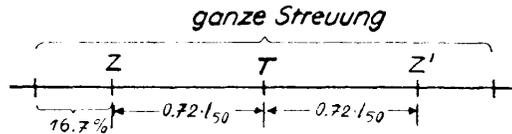


Bild 39: Ermitteln der wahrscheinlichsten Lage des mittleren Treffpunktes aus dem Vorzeichenverhältnis einer Reihe.

Lage hinter dem mittleren Treffpunkt, im gleichen Abstand, den dieser vom Ziel hat, also symmetrisch im Treffbild, die Marke Z' , so würden 16,7% aller Schüsse hinter dieser Marke liegen. Zwischen Z und Z' liegen also die restlichen $100 - 2 \cdot 16,7 = 66,6\%$ aller Schüsse. Die Strecke $Z-Z'$ ergibt sich danach aus der Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren zu 1,44 der 50%igen Längsstreuung. Der in der Mitte liegende mittlere Treffpunkt liegt um die Hälfte, also um $0,72 \cdot l_{50}$ hinter dem Ziel, d. h. die wahrscheinlichste Aufsatzänderung ist $0,72 \cdot l_{50}$ oder 1,44 r oder 0,36 der engen Gabel zu $2 \cdot l_{50}$.

[Folgende, im Ausland vielfach angewandte Regel ergibt ohne Zuhilfenahme der Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren angenähert die wahrscheinlichste Aufsatzänderung: Von einer Reihe mit der geraden Schußzahl n seien k Kurzschüsse und w Weitschüsse beobachtet. Dann ist die Aufsatzentfernung um $\frac{w-k}{2}$ (bzw. $\frac{k-w}{2}$) n tel der engen Gabel zu ($2 \cdot l_{50}$) zu ändern. Im obigen

Beispiel ist $n = 6$, $w = 5$, $k = 1$, $\frac{w-k}{2} = 2$. Die wahrscheinlichste Aufsatzänderung beträgt also $2 \cdot 6 = 12$ der engen Gabel zu $2 \cdot l_{50}$. Das ist praktisch derselbe Wert, der oben errechnet wurde. (Wird der Unterschied zwischen der Zahl der Kurz- und der Weitschüsse kleiner, so wird die Annäherung an den wahren Wert noch besser.)

Diese Regel ist lediglich eine andere Fassung des Näherungsausdrucks: Treffwahrscheinlichkeit in % ≈ 50 mal Wahrscheinlichkeitsfaktor (s. S. 93). Sie liefert brauchbare Näherungswerte, wenn $\left| \frac{w-k}{2n} \right| \leq \frac{1}{3}$ ist. Das ist bei einer Reihe von 6 Schüssen stets der Fall, solange nicht alle Schüsse gleiches Vorzeichen haben.]

In Wirklichkeit wird die Verteilung der beschränkten Schußzahl einer Reihe mehr oder weniger von der Gaußschen Verteilung abweichen. Beim Ermitteln der wahrscheinlichsten Aufsatzänderung wird also im allgemeinen ein Fehler gemacht. Dieser selbe Fehler überträgt sich auch auf das Einschießergebnis (die wahrscheinlichste Aufsatzentfernung), er heißt deshalb der Einschießfehler. Sein wahrscheinlicher Wert, d. h. der Wert, den der jeweils vorliegende Einschießfehler in 50% aller Fälle unterschreitet, ist der „wahrscheinliche Einschießfehler“.

Die Genauigkeit, die sich auf Grund des Vorzeichenverhältnisses einer Reihe erreichen läßt, geht aus nachstehender Zusammenstellung hervor:

Reihe von 6 Schuß		Reihe von 12 Schuß	
Zahl der Kurz- (oder Weit-) schüsse	wahrscheinlicher Ein- schießfehler ($r = l_{50}/2$)	Zahl der Kurz- (oder Weit-) schüsse	wahrscheinlicher Ein- schießfehler ($r = l_{50}/2$)
1 oder 5	0,64r	1 oder 11	0,58r
2 oder 4	0,55r	2 oder 10	0,45r
3	0,53r	3 oder 9	0,41r
		4 oder 8	0,39r
		5 oder 7	0,37r
		6	0,37r

(Werte nach Sabudski, v. Eberhard, Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

Man sieht, daß die Genauigkeit des Einschießens, selbst im günstigsten Falle, geringer ist als die mit der gleichen Zahl ausgemessener Schüsse erreichbare (s. S. 95 u. 105). Dem wahrscheinlichen Einschießfehler entspricht beim ausgemessenen Treffbild der wahrscheinliche Fehler des mittleren

Treffpunktes (r_T). Er beträgt bei 6 Schüssen: $\frac{r}{6} = 0,41 r$, bei 12 Schüssen: $\frac{r}{12} = 0,29 r$, ist

also (wenn man von dem nicht allgemein angebbaren Fehler, mit dem die Ausmessung der Schüsse behaftet ist, absieht) stets kleiner als die Werte der obigen Zusammenstellung.

Die Zusammenstellung zeigt ferner, daß die Genauigkeit des Reiheschießens um so größer ist, je mehr sich das Verhältnis der Kurz- und Weitschüsse der Gleichheit nähert, d. h., je kleiner die wahrscheinlichste Aufsatzänderung ist (s. S. 98). Außerdem steigt die Genauigkeit mit wachsender Schußzahl.

Man wird beim Schießen natürlich danach streben, sobald wie möglich von einer als ungünstig erkannten Aufsatzentfernung zu einer richtigeren überzugehen. Andererseits muß die Schußzahl einen solchen Schluß auch wirklich gestatten. Bei Schußzahlen unter 6 wird aber die Bestimmung der wahrscheinlichsten Aufsatzänderung ganz unsicher; mit Ausnahme des auf S. 107 besprochenen Falles (die ersten 3 Schüsse schon mit gleichen Vorzeichen) rechtfertigen erst 6 bis 8 Schuß eine Aufsatzänderung.

2. Die praktisch auf Grund des Vorzeichenverhältnisses einer Reihe durchzuführende Aufsatzänderung

Das Verfahren, nach dem im Vorangegangenen die Aufsatzverbesserung ermittelt wurde, ist für die Praxis nicht einfach genug. Außerdem läßt sich der genaue Betrag der theoretisch richtigen Änderung sowieso meist nicht am Aufsatz einstellen, da aus praktischen und technischen Gründen dessen Unterteilung nur bis zu einer gewissen Grenze gehen kann. Man muß sich also bei den Aufsatzänderungen, die man wirklich durchführt, mit größeren Sprüngen, die der Aufsatzunterteilung angepaßt sind, begnügen. Diese Sprünge sind natürlich so zu bemessen, daß sie den theoretisch richtigen Änderungen möglichst nahekommen. Die vorhandene Unterteilung des Aufsatzes kann schließlich im Endergebnis des Reiheschießens dazu führen, daß abwechselnd auf zwei benachbarten Aufsatzentfernungen geschossen werden muß.

Im Folgenden sind die bei einer Reihe von 6 Schüssen möglichen Fälle (von Treffern abgesehen) und die daraus zu ziehenden Folgerungen näher untersucht:

- 1.) 5 Kurzschüsse, 1 Weitschuß (bzw. umgekehrt). Dieser Fall ist im Beispiel auf S. 105 betrachtet, die wahrscheinlichste Aufsatzänderung ergab sich dort zu $1,44r$, d. h. $0,36$ der engen Gabel zu $2 \cdot l_{50}$. Eine Änderung um diesen Betrag, der das 2,25fache des wahrscheinlichen Einschießfehlers (s. Zusammenstellung auf S. 105) darstellt, ist durchaus sinnvoll, zumal da im Abstand $1,44r$ vom wahren mittleren Treffpunkt die Treffwahrscheinlichkeit nur 62% des möglichen Höchstwertes beträgt. Ist die Gabel zu $2 \cdot l_{50}$ am Aufsatz in Viertel unterteilt, so kommt man mit einer Aufsatzänderung um $\frac{1}{4}$ der Gabel der wahrscheinlichsten Aufsatzentfernung näher als mit einer Änderung um eine halbe Gabel. Sieht man für die Aufsatzänderung Sprünge von 25 m vor, so entspricht ein solcher Sprung bei den wirklich vorhandenen Streuungen der theoretisch richtigen Änderung um $1,44r$ am besten.
- 2.) 2 Kurz-, 4 Weitschüsse (bzw. umgekehrt). Die wahrscheinlichste Aufsatzänderung ergibt sich nach der Tafel der Wahrscheinlichkeitsfaktoren zu $0,64r$, d. h. $0,16$ der engen Gabel zu $2 \cdot l_{50}$. Die Genauigkeit des Einschießergebnisses würde es gerade noch rechtfertigen, wenn man die Aufsatzentfernung tatsächlich um diesen Betrag, der knapp über dem wahrscheinlichen Ein-

schießfehler von $0,55r$ liegt, ändern würde. Die Treffwahrscheinlichkeit würde dadurch aber nicht wesentlich verbessert; sie beträgt im Abstand $0,64r$ vom wahren mittleren Treffpunkt schon $91,5\%$ des möglichen Höchstwertes. Selbst wenn es also möglich wäre, den wahren mittleren Treffpunkt genau ins Ziel zu legen, würde die Trefferaussicht nur unerheblich gesteigert (s. auch S. 100ff.).

Eine Aufsatzänderung um 25 m kommt nicht in Frage. 25 m sind im allgemeinen mehr als doppelt so groß wie $0,64r$ (da die l_{50} meist unter 39 m liegt). Man würde durch eine Änderung um 25 m also nur eine Verschlechterung der Treffwahrscheinlichkeit herbeiführen.

- 3.) 3 Kurz-, 3 Weitschüsse. Es braucht nicht erörtert zu werden, daß dies der günstigste Fall ist, in dem die Aufsatzentfernung beibehalten wird.

Zu 1 bis 3: Was die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der aufgeführten 3 Fälle anbetrifft, so läßt sich folgendes beweisen: Beginnt das Reiheschießen auf Grund des Ergebnisses der Nachprüfung einer Gabel vom Ausmaß $2 \cdot l_{50}$ (auf der Gabelmitte oder auf einer Gabelgrenze), so ist der günstigste Fall 3.) wahrscheinlicher als jeder andere. Wird das Reiheschießen auf der Mitte einer nicht nachgeprüften Gabel zu $2 \cdot l_{50}$ aufgesetzt, so ist Fall 3.) unwahrscheinlicher als Fall 2.), dieser wiederum unwahrscheinlicher als Fall 1.). Die Wahrscheinlichkeit des günstigsten Falles 3.) wird noch kleiner bei größerer Gabel (also auch bei der 100-m-Gabel). Hierin liegt ein wesentlicher Nachteil der 100-m-Gabel, der in Kauf genommen werden muß.

Je mehr das Gabelmaß den Betrag $2 \cdot l_{50}$ übersteigt, desto mehr muß mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß das Ziel überhaupt nicht innerhalb der engeren Streuentfernung der Gabelmitte liegt, besonders, wenn die Gabel nicht nachgeprüft ist. Schon während des Reiheschießens kann sich ein Anhalt dafür ergeben, daß die Reihe das Ziel mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht erfaßt, zum mindestens aber ungünstig liegt. Zweckmäßigerweise wird man dann diese Reihe nicht zu Ende schießen, sondern die Erhöhung vorher ändern. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn beim Schießen auf der Mitte einer nicht nachgeprüften Gabel zu $2 \cdot l_{50}$ die ersten 3 Schüsse gleiches Vorzeichen haben. Sind die ersten 3 Schüsse kurz, so läßt sich zeigen, daß die wahrscheinlichste Aufsatzentfernung um $1,75r$ über der Gabelmitte liegt. Man kommt also, wenn die $2 \cdot l_{50}$ -Gabel in Viertel unterteilt ist, mit der oberen Gabelgrenze der wahrscheinlichsten Aufsatzentfernung am nächsten.

Bei der zu großen 100-m-Gabel ist die Gefahr, daß die Wirkung der auf Gabelmitte geschossenen ersten Reihe ganz verloren geht, noch größer, eine entsprechende Aufsatzänderung ist hier also erst recht angebracht.

III. Einschießen nach der Seite.

Von der seitlichen Lage der Schüsse zum Ziel wird in den meisten Fällen nicht nur das Vorzeichen, sondern mehr oder weniger genau der Betrag festzustellen sein. Trotzdem liegen die Verhältnisse beim seitlichen Verlegen des mittleren Treffpunktes in Ziel im allgemeinen anders als beim Einschießen nach der Länge auf Grund gemessener Zielabstände der Schüsse (s. S. 99). In der unteren Winkelgruppe, also bei der Mehrzahl aller artilleristischen Schießen, liegt nämlich die 50% ige Breitenstreuung unter einem Strich / (s. S. 79), d. h., die Genauigkeit, mit der man Seitenwinkel messen und einstellen kann, ist nicht größer als die Genauigkeit des Schießens. Es hätte also keinen Sinn, der Breitenstreuung durch ein Schießverfahren Rechnung tragen zu wollen. Fehlerhafte Seitenrichtungen werden daher unmittelbar um den festgestellten Winkel berichtet, so wie wenn das Geschütz keine Breitenstreuung hätte.

In der oberen Winkelgruppe dagegen beträgt die b_{50} , wenigstens in dem Bereich, der die steilsten Fallwinkel ergibt, mehrere Strich. Hier übersteigt also die Meß- und Einstellgenauigkeit für Seitenwinkel wesentlich die Genauigkeit des Schießens, und die Verhältnisse liegen ähnlich wie beim Einschießen nach der Länge auf Grund ausgemessener Schußlagen. Es ist daher in der

oberen Winkelgruppe zweckmäßig, sich auch nach der Seite nach dem Verfahren der kleiner werdenden Änderungen (s. S. 99ff.) einzuschießen.

G. Einfluß der Erddrehung auf die Flugbahn.

Außer den bisher schon genannten Einflüssen wirkt auch die Drehung der Erde um ihre Achse auf jede Flugbahn ein. Infolge von Trägheitswirkungen, auf die im Folgenden näher eingegangen wird, verlegt sich der Fallpunkt gegenüber der Lage, die er bei stillstehender Erde hätte, und zwar ändern sich im allgemeinen sowohl die seitliche Lage des Schusses als auch die Schußweite. Diese Änderungen sind bei kleinen und mittleren Schußweiten so klein, daß sie vernachlässigt werden können, von einer gewissen Schußweite ab und muß jedoch der seitliche Einfluß der Erddrehung, bei sehr großen Schußweiten auch ihr Einfluß auf die Schußweite, erfaßt und ausgeschaltet werden. Hierzu dienen besondere Ausschaltetafeln in den Schußtafeln für weitreichende Geschütze.

Den Einfluß der Erddrehung auf die endgültige Lage des Fallpunktes kann man sich aus folgenden drei Teileinflüssen zusammengesetzt denken:

- 1.) In der Mehrzahl aller Fälle wird das Geschöß, indem es von der Abgangsebene aufsteigt, sich von der Erdachse entfernen. Ist das der Fall, so bleibt es, sowie es die Abgangsebene verlassen hat, hinter der sich drehenden Erde zurück. Um diesen Teileinfluß allein, losgelöst von anderen Einflüssen, zu untersuchen, nehmen wir an, ein Geschütz schieße am Äquator senkrecht nach oben. Würde die Erde sich nicht drehen, so würde das Geschöß auf seinen Ausgangspunkt zurückfallen. Auf der sich drehenden Erde bekommt (gesehen von einem außerhalb der Erde ruhenden Beobachter) das Geschöß die Umfangsgeschwindigkeit des Abschußpunktes, also die des Äquators, als waagerechten Geschwindigkeitsanteil mit. Denkt man sich ein mit der Erde fest verbundenes und mit ihr bewegtes Koordinatensystem, so hat das Geschöß, sowie es die Abgangsebene verlassen hat, stets eine kleinere waagerechte Geschwindigkeit (nämlich die der Erdoberfläche) als diejenigen Punkte dieses Koordinatensystems, mit denen es sich jeweils auf gleicher Höhe befindet. Das gilt für den aufsteigenden wie für den absteigenden Ast. Das Geschöß bleibt also in dem hier betrachteten Falle hinter dem mit der Erde nach Osten bewegten Koordinatensystem zurück und wird infolgedessen westlich vom Abschußpunkt niederfallen. Diese Teilwirkung der Erddrehung, nämlich die Verlegung des Fallpunktes nach Westen, tritt auf der Nordhalbkugel bei jedem Schießen nach Westen, Süden oder Osten ein (während bei der Schußrichtung Norden, wenn die Erhöhung nicht groß ist, wegen des unter Ziffer 3 noch zu besprechenden Teileinflusses die Verhältnisse anders liegen können). (Wegen der Überlagerung durch andere Einflüsse s. S. 110.)

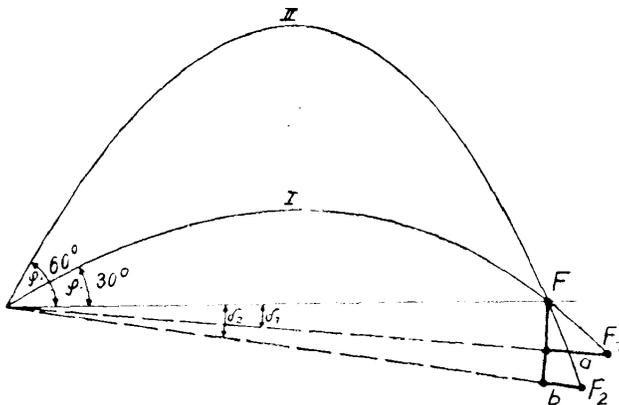


Bild 40: Ein Einfluß der Erddrehung auf die Schußweite.

2.) Die Abgangsebene dreht sich mit der Erde, während das Geschöß fliegt, so daß das fallende Geschöß sie erst erreicht, nachdem sie um einen gewissen Winkel gekippt ist. Um diese Tatsache völlig für sich und nicht durch andere Erscheinungen überlagert zu untersuchen, nehmen wir an (s. Bild 40), es würde im luftleeren Raum am Äquator mit den Erhöhungen $\varphi = 30^\circ$ (Flugbahn I) und $\varphi = 60^\circ$ (Flugbahn II) nach Osten geschossen. Dabei drehe sich die Abgangsebene im Sinne der Erddrehung mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit um den Ausgangspunkt der Flugbahn. (Diese Betrachtung vereinfacht etwas. Sie führt jedoch zu demselben Ergebnis, wie die genaue Untersuchung des tatsächlichen, etwas verwickelteren Vorganges.) Bei unbeweglicher Abgangsebene, d. h. bei ruhender Erde, würden beide Flugbahnen zum gemeinsamen Fallpunkt F führen. Dreht sich aber die Abgangsebene wie vorausgesetzt, so wird sie von der Flugbahn I bei F_1 , von der Flugbahn II bei F_2 geschnitten. (Die beiden Gipfelhöhen verhalten sich bei den gegebenen Erhöhungen wie 1:3, die beiden Flugzeiten, und damit auch die Winkel δ_1 und δ_2 wie 1:3.) Es zeigt sich, daß das Kippen der Abgangsebene nach unten bei der Flugbahn zum Schußweitenzuwachs a , bei der Flugbahn II zum kleineren Zuwachs b führt. Beim Schuß nach Osten ergibt also das mit der Erddrehung verbundene Kippen der Abgangsebene eine Vergrößerung der Schußweite, die um so größer ausfällt, je flacher die Flugbahn ist. Beim Schuß nach Westen ist natürlich eine entsprechende Schußweitenverkürzung die Folge.

Diese Teilwirkung der Erddrehung wirkt sich bei allen Erhöhungen und bei allen Schußrichtungen mit Ausnahme der Schußrichtungen Nord und Süd aus.

3.) Die dritte Teileinwirkung der Erddrehung auf die Flugbahn ist durch ihr Auftreten auch bei anderen Erscheinungen (Passatwinde, Drehsinn der Winde, die in ein barometrisches Tief einströmen, u. a.) verhältnismäßig bekannt. Sie besteht darin, daß das Geschöß durch die sich drehende Erde die Umfangsgeschwindigkeit des Abschußpunktes als Geschwindigkeitsanteil mitbekommt, daß aber die Umfangsgeschwindigkeit des Ziels nach Betrag (beim Schuß nach Norden und Süden) oder Richtung (bei Schuß nach Osten oder Westen) von der des Abschußpunktes verschieden ist. Die Folge ist auf der Nordhalbkugel stets eine Ablenkung nach rechts.

Schießt z. B. ein Geschütz von einem Punkt des 50. nördlichen Breitenkreises genau nach Norden, so bekommt das Geschöß (wiederum vom Beobachter außerhalb der Erde gesehen) die nach Osten gerichtete Geschwindigkeit, die infolge der Erddrehung alle Punkte dieser Breite haben, mit. Je weiter das Geschöß nach Norden kommt, desto kleiner ist die Umfangsgeschwindigkeit der jeweils von ihm überflogenen Punkte, desto mehr wird also das Geschöß diesen Punkten nach Osten vorausziehen. Natürlich schlägt es auch ostwärts vom Längengrad des Abschußpunktes ein. Ein mit der Erde bewegter Beobachter wird also ein Abweichen des nordwärts abgefeuerten Geschosses nach Osten und (wie sich nach entsprechender Überlegung leicht ergibt) des südwärts abgefeuerten Geschosses nach Westen, allgemein auf der Nordhalbkugel also eine Ablenkung nach rechts feststellen.

Daß eine Rechtsablenkung auf der Nordhalbkugel auch beim Schuß nach Osten und Westen eintritt, wird durch folgende Überlegung klar (s. Bild 41). Das Bild zeigt die Erde von Norden aus gesehen, die Schußweite ist der Deutlichkeit wegen im Verhältnis zur Größe der Erde stark übertrieben.

Bei 1 stehe das Geschütz, für welches ohne Berücksichtigung der Erddrehung die Schießgrundlagen nach dem Punkte 2 ermittelt worden sind. Auf einer sich nicht drehenden Erde würde also ein Schuß bei 2 einschlagen. Wird jedoch mit diesen Schießgrundlagen auf der sich drehenden Erde geschossen, so stellt der außerhalb der Erde befindliche Beobachter folgendes fest:

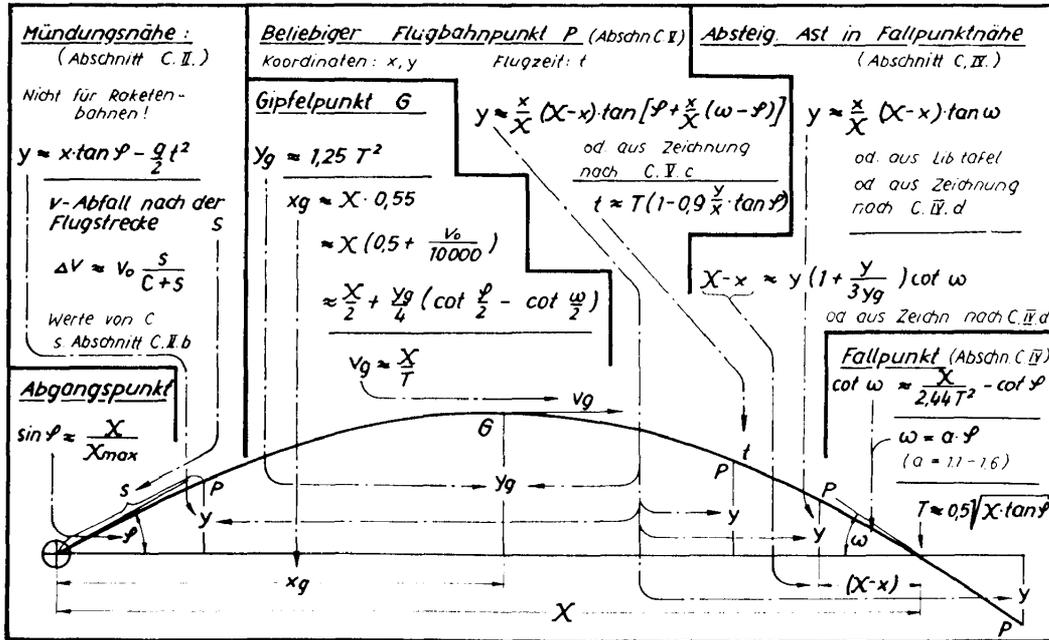


Bild 42: Flugbahnbild mit Formelsammlung.

Umrechnungstafel für die wichtigsten in- und ausländischen Winkelmaße

1 Einheit	2 Anzahl der Einheiten auf den Vollkreis	Eine Einheit der Spalte 1 entspricht:					
		Neugrad	Grad	Minuten	„wahre“ Tausendstel	grob ab- gerundete Tausendstel	Strich
1 Neugrad (1 ^g)	400	1 ^g	0,9°	54′	15,71	15	16″
1 Grad (1°)	360	1,111 ^g	1°	60′	17,45	16,67	17,78″
1 Minute (1′)	21600	0,0185 ^g	0,01667°	1′	0,291	0,278	0,296″
1 „wahres“ Tausendstel	6 283 (= 2 π · 1000)	0,0637 ^g	0,0573°	3,44′	1	0,955	1,019″
1 grob abgerundetes Tausendstel	6 000	0,0667 ^g	0,06°	3,6′	1,047	1	1,067″
1 Strich (Teilstrich, abgerundetes Tausendstel, 1″)	6 400	0,0625 ^g	0,0562°	3,38′	0,982	0,938	1

Natürliche Werte der trigonometrischen Funktionen

Strich	sin	tan	cot	cos		Strich	sin	tan	cot	cos	
0	0,0000	0,0000	∞	1,000	1600	400	0,3827	0,4142	2,414	0,9239	1200
10	0,0098	0,0098	101,9	1,000	90	10	0,3917	0,4258	2,349	0,9201	90
20	0,0196	0,0196	50,92	0,9998	80	20	0,4008	0,4374	2,286	0,9162	80
30	0,0295	0,0295	33,94	0,9996	70	30	0,4097	0,4492	2,226	0,9122	70
40	0,0393	0,0393	25,45	0,9992	60	40	0,4187	0,4610	2,169	0,9081	60
50	0,0491	0,0491	20,36	0,9988	60	50	0,4276	0,4730	2,114	0,9040	50
60	0,0589	0,0590	16,96	0,9983	40	60	0,4364	0,4850	2,062	0,8998	40
70	0,0687	0,0688	14,53	0,9976	30	70	0,4452	0,4972	2,011	0,8954	30
80	0,0785	0,0787	12,71	0,9969	20	80	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	20
90	0,0882	0,0886	11,29	0,9961	10	90	0,4627	0,5220	1,916	0,8865	10
100	0,0980	0,0985	10,15	0,9952	1500	500	0,4714	0,5345	1,871	0,8819	1100
10	0,1078	0,1085	9,224	0,9942	90	10	0,4800	0,5472	1,827	0,8773	90
20	0,1175	0,1184	8,449	0,9931	80	20	0,4886	0,5600	1,786	0,8725	80
30	0,1273	0,1283	7,793	0,9919	70	30	0,4972	0,5730	1,745	0,8677	70
40	0,1370	0,1383	7,230	0,9906	60	40	0,5057	0,5861	1,706	0,8627	60
50	0,1467	0,1483	6,742	0,9892	50	50	0,5141	0,5994	1,668	0,8577	50
60	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	40	60	0,5225	0,6128	1,632	0,8526	40
70	0,1661	0,1685	5,936	0,9861	30	70	0,5308	0,6264	1,596	0,8475	30
80	0,1758	0,1786	5,600	0,9844	20	80	0,5391	0,6401	1,562	0,8422	20
90	0,1855	0,1887	5,299	0,9827	10	90	0,5474	0,6541	1,529	0,8369	10
200	0,1951	0,1989	5,027	0,9808	1400	600	0,5556	0,6682	1,497	0,8315	1000
10	0,2047	0,2091	4,782	0,9788	90	10	0,5637	0,6825	1,465	0,8260	90
20	0,2143	0,2194	4,558	0,9768	80	20	0,5718	0,6970	1,435	0,8204	80
30	0,2239	0,2297	4,353	0,9746	70	30	0,5798	0,7117	1,405	0,8148	70
40	0,2335	0,2401	4,165	0,9724	60	40	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	60
50	0,2430	0,2505	3,992	0,9700	50	50	0,5957	0,7417	1,348	0,8032	50
60	0,2525	0,2610	3,832	0,9676	40	60	0,6036	0,7570	1,321	0,7973	40
70	0,2620	0,2715	3,684	0,9651	30	70	0,6114	0,7725	1,294	0,7914	30
80	0,2714	0,2820	3,546	0,9625	20	80	0,6191	0,7883	1,268	0,7853	20
90	0,2809	0,2927	3,417	0,9597	10	90	0,6268	0,8044	1,243	0,7792	10
300	0,2903	0,3034	3,297	0,9569	1300	700	0,6344	0,8207	1,219	0,7730	900
10	0,2997	0,3141	3,184	0,9540	90	10	0,6420	0,8372	1,194	0,7667	90
20	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	80	20	0,6495	0,8541	1,171	0,7604	80
30	0,3183	0,3358	2,978	0,9480	70	30	0,6569	0,8712	1,148	0,7540	70
40	0,3276	0,3468	2,884	0,9448	60	40	0,6643	0,8886	1,125	0,7475	60
50	0,3369	0,3578	2,795	0,9415	50	50	0,6716	0,9064	1,103	0,7410	50
60	0,3461	0,3689	2,711	0,9382	40	60	0,6788	0,9244	1,082	0,7343	40
70	0,3553	0,3801	2,631	0,9348	30	70	0,6860	0,9428	1,061	0,7276	30
80	0,3645	0,3914	2,555	0,9312	20	80	0,6931	0,9615	1,040	0,7209	20
90	0,3736	0,4028	2,483	0,9276	10	90	0,7001	0,9806	1,020	0,7140	10
400	0,3827	0,4142	2,414	0,9239	1200	800	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	800
	cos	cot	tan	sin	Strich		cos	cot	tan	sin	Strich